

応力速度*

Nobuyuki Umetani

平成 22 年 11 月 5 日

目次

1	概要	2
2	Cauchy 応力の各種速度	3
2.1	Cauchy 応力の各種速度	3
2.1.1	Cauchy 応力の Jauman 速度	3
2.1.2	Cauchy 応力の Green-Naghdi 速度	4
2.1.3	Cauchy 応力の Oldroyd 速度	5
2.1.4	Cauchy 応力の Cotter-Rivelin 速度	6
2.2	各種応力速度の関係	7
3	相対 Kirchhoff 応力の速度	7
3.0.1	相対 Kirchhoff 応力の Jauman 速度	8
3.0.2	相対 Kirchhoff 応力の Oldroyd 速度	8
3.0.3	相対 Kirchhoff 応力の Cotter-Rivelin 速度	8
3.0.4	相対 Kirchhoff 応力の Green-Naghdi 速度	8
3.0.5	Truesdell の応力速度	9
3.1	まとめ	10
4	応力速度の客観性	10
4.1	各種テンソルの客観性	12
4.1.1	Cauchy 応力	12

*これは忘れっぽい著者が昔勉強したことを書き留めておく備忘録です。きっと間違いを多く含んでいます。すいません。ご指摘ご意見などありましたら教えてもらえると有り難いです。

4.1.2	変形勾配テンソル	13
4.1.3	速度勾配テンソル	13
4.1.4	歪み速度テンソル	14
4.1.5	回転速度テンソル	14
4.1.6	剛体回転速度テンソル	14
4.1.7	Cauchy 応力を時間微分したテンソルに客観性がない	15
4.2	Cauchy 応力の各種速度の客観性	15
4.2.1	Cauchy 応力の Jauman 速度の客観性	15
4.2.2	Cauchy 応力の Oldroyd 速度の客観性	16
4.2.3	Cauchy 応力の Cotter-Rivelin 速度の客観性	16
4.2.4	Cauchy 応力の Green-Naghdi 速度の客観性	17
4.3	Kirchhoff 応力の各種速度の客観性	17
5	参考にしたもの	18

1 概要

物質の歪みと応力の関係を表す構成式を作るためには、構成式が物質客観性を満足する必要がある。つまり、もし歪みが客観性を持つ場合は応力も客観性を持つ必要がある。物質の変形と関係のない、観測者の回転や移動によって応力が発生してしまう矛盾を避けるためである。弾塑性体などは速度型の構成式で記述されるのが一般的である。つまり弾塑性体は歪速度と応力速度を結びつける式によって表現される。この時歪みとしては、客観性をもつ歪速度テンソルを用いる。よって応力速度も客観性を持たせなければならない。Cauchy 応力を直接時間微分したテンソルには客観性がなく、歪速度と関連付けることはできない。Cauchy 応力や相対 Kirchhoff 応力の客観性を持つような速度を取ったものを用いる。このような速度の取り方は

1. Jauman 速度
2. Oldroyd 速度
3. Cotter-Rivelin 速度
4. Green-Naghdi 速度

などが挙げられる。以下それぞれについて詳しく説明する。

2 Cauchy 応力の各種速度

2.1 Cauchy 応力の各種速度

Cauchy 応力テンソル \mathbf{T} はある共変や反変基底ベクトルによって次のように成分表示される.

$$\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = T_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{T}} = \dot{T}^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j + T^{ij} \dot{\mathbf{g}}_i \otimes \mathbf{g}_j + T^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \dot{\mathbf{g}}_j \quad (2)$$

$$= \dot{T}_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j + T_{ij} \dot{\mathbf{g}}^i \otimes \mathbf{g}^j + T_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \dot{\mathbf{g}}^j \quad (3)$$

基底ベクトルの時間変化を取り除いた応力の速度は次のようになる. 共変基底ベクトルの変化を考えた場合は

$$\dot{T}^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = \dot{\mathbf{T}} - T^{ij} \dot{\mathbf{g}}_i \otimes \mathbf{g}_j - T^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \dot{\mathbf{g}}_j \quad (4)$$

反変基底ベクトルの変化を考えた場合は

$$\dot{T}_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = \dot{\mathbf{T}} - T_{ij} \dot{\mathbf{g}}^i \otimes \mathbf{g}^j - T_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \dot{\mathbf{g}}^j \quad (5)$$

基底ベクトルを時間変化させるやり方によって、Jauman 速度 $\dot{\mathbf{T}}^{(J)}$ 、Oldroyd 速度 $\dot{\mathbf{T}}^{(O)}$ 、Cotter-Rivlin 速度 $\dot{\mathbf{T}}^{(C)}$ などの時間微分の種類がある.

2.1.1 Cauchy 応力の Jauman 速度

応力の変化から現時刻の回転の分を差し引いたものを Jauman 速度という. 共変基底ベクトルの時間変化が物質の回転に従うとして、回転速度テンソル \mathbf{W} を用いて

$$\dot{\mathbf{g}}_i = \mathbf{W} \cdot \mathbf{g}_i \quad (6)$$

としたときの、基底ベクトルの変化分を取り除いた応力の速度を計算する.

$$\dot{\mathbf{T}}^{(J)} = \dot{T}^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \quad (7)$$

$$= \dot{\mathbf{T}} - T^{ij} \dot{\mathbf{g}}_i \otimes \mathbf{g}_j - T^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \dot{\mathbf{g}}_j \quad (8)$$

$$= \dot{\mathbf{T}} - T^{ij}(\mathbf{W} \cdot \mathbf{g}_i) \otimes \mathbf{g}_j - T^{ij} \mathbf{g}_i \otimes (\mathbf{W} \cdot \mathbf{g}_j) \quad (9)$$

$$= \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{W} \cdot (T^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j) - (T^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j) \cdot \mathbf{W}^T \quad (10)$$

$$= \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{W}^T \quad (11)$$

$$= \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{W} \quad (12)$$

Cauchy 応力の Jauman 速度

$$\dot{\mathbf{T}}^{(J)} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{W} \quad (13)$$

2.1.2 Cauchy 応力の Green-Naghdi 速度

応力の変化から基準時刻からの剛体回転の分を差し引いたものを Green-Naghdi 速度という。共変基底ベクトルが基準時刻 $t_0 = 0$ からの物質の剛体回転 \mathbf{R} に従うとして、

$$\mathbf{g}_i(t) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{g}_i(0) \quad (14)$$

$$\dot{\mathbf{g}}_i(t) = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{g}_i(0) = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^{-1} \mathbf{g}_i(t) = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T \mathbf{g}_i(t) \quad (15)$$

となる。 $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T$ とおくと、

$$\dot{\mathbf{g}}_i = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{g}_i \quad (16)$$

となる。この時の基底ベクトルの変化分を取り除いた応力の速度を計算する。

$$\dot{\mathbf{T}}^{(G)} = \dot{T}^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \quad (17)$$

$$= \dot{\mathbf{T}} - T^{ij} \dot{\mathbf{g}}_i \otimes \mathbf{g}_j - T^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \dot{\mathbf{g}}_j \quad (18)$$

$$= \dot{\mathbf{T}} - T^{ij}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{g}_i) \otimes \mathbf{g}_j - T^{ij} \mathbf{g}_i \otimes (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{g}_j) \quad (19)$$

$$= \dot{\mathbf{T}} - \boldsymbol{\Omega} \cdot (T^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j) - (T^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j) \cdot \boldsymbol{\Omega}^T \quad (20)$$

$$= \dot{\mathbf{T}} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Omega}^T \quad (21)$$

$$= \dot{\mathbf{T}} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (22)$$

$$\dot{\mathbf{T}}^{(G)} = \dot{\mathbf{T}} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (23)$$

ここで、次で示される $\boldsymbol{\Omega}$ の反対称性を利用した、

$$\boldsymbol{\Omega}^T = (\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T)^T \quad (24)$$

$$= \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{R}}^T \quad (25)$$

$$= \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{R}}^T - \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T \quad (26)$$

$$= (\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T) \cdot - \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T \quad (27)$$

$$= I \cdot - \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T \quad (28)$$

$$= -\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T \quad (29)$$

$$= -\boldsymbol{\Omega} \quad (30)$$

2.1.3 Cauchy 応力の Oldroyd 速度

応力の変化から速度勾配による共変基底ベクトルの変化を差し引いた時の、反変成分の変化による速度を Oldroyd 速度という。共変基底ベクトルの時間変化が物質とともに変形するとして、

$$\dot{\mathbf{g}}_i = \mathbf{L} \cdot \mathbf{g}_i \quad (31)$$

としたときの、基底ベクトルの変化分を取り除いた応力の速度を計算する、

$$\dot{\mathbf{T}}^{(O)} = \dot{T}^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \quad (32)$$

$$= \dot{\mathbf{T}} - T^{ij} \dot{\mathbf{g}}_i \otimes \mathbf{g}_j - T^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \dot{\mathbf{g}}_j \quad (33)$$

$$= \dot{\mathbf{T}} - T^{ij} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{g}_i) \otimes \mathbf{g}_j - T^{ij} \mathbf{g}_i \otimes (\mathbf{L} \cdot \mathbf{g}_j) \quad (34)$$

$$= \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{L} \cdot (T^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j) - (T^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j) \cdot \mathbf{L}^T \quad (35)$$

$$= \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}^T \quad (36)$$

$$\dot{\mathbf{T}}^{(O)} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}^T \quad (37)$$

Jauman 速度と Oldroyd 速度の間には

$$\dot{\mathbf{T}}^{(J)} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{W}^T \quad (38)$$

$$= \dot{\mathbf{T}} - (\mathbf{L} - \mathbf{D}) \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot (\mathbf{L} - \mathbf{D})^T \quad (39)$$

$$= \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}^T + \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}^T \quad (40)$$

$$= \dot{\mathbf{T}}^{(O)} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \quad (41)$$

の関係がある.

2.1.4 Cauchy 応力の Cotter-Rivlin 速度

応力の変化から速度勾配による共変基底ベクトルの変化を差し引いた時の、共変成分の変化による速度を Cotter-Rivlin 速度という. 共変基底ベクトルの時間変化が物質とともに変形するとして、

$$\dot{\mathbf{g}}_i = \mathbf{L} \cdot \mathbf{g}_i \quad (42)$$

このよき、反変基底ベクトルの変化を求めてみよう.

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j) = \frac{d}{dt}(\delta_j^i) = 0 \quad (43)$$

$$= \dot{\mathbf{g}}^i \cdot \mathbf{g}_j + \mathbf{g}^i \cdot \dot{\mathbf{g}}_j \quad (44)$$

$$= \dot{\mathbf{g}}^i \cdot \mathbf{g}_j + \mathbf{g}^i \cdot (\mathbf{L} \cdot \mathbf{g}_j) \quad (45)$$

$$= \dot{\mathbf{g}}^i \cdot \mathbf{g}_j + (\mathbf{L}^T \cdot \mathbf{g}^i) \cdot \mathbf{g}_j \quad (46)$$

$$\Leftrightarrow \dot{\mathbf{g}}^i \cdot \mathbf{g}_j = (-\mathbf{L}^T \cdot \mathbf{g}^i) \cdot \mathbf{g}_j \quad (47)$$

$$\Leftrightarrow \dot{\mathbf{g}}^i = -\mathbf{L}^T \cdot \mathbf{g}^i \quad (48)$$

これらを代入すると、

$$\dot{\mathbf{T}}^{(C)} = \dot{T}_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = \dot{\mathbf{T}} - T_{ij} \dot{\mathbf{g}}^i \otimes \mathbf{g}^j - T_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \dot{\mathbf{g}}^j \quad (49)$$

$$= \dot{\mathbf{T}} - T_{ij} (-\mathbf{L}^T \cdot \mathbf{g}^i) \otimes \mathbf{g}^j - T_{ij} \mathbf{g}^i \otimes (-\mathbf{L}^T \cdot \mathbf{g}^j) \quad (50)$$

$$= \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{L}^T \cdot (T_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j) + (T_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j) \cdot \mathbf{L} \quad (51)$$

$$= \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{L} \quad (52)$$

$$\dot{\mathbf{T}}^{(C)} == \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{L} \quad (53)$$

2.2 各種応力速度の関係

$$\mathbf{L} = \mathbf{W} + \mathbf{D} \quad (54)$$

であり、 $\mathbf{D} = 0$ つまり、変形が変化しないときは

$$\dot{\mathbf{T}}^{(J)} = \dot{\mathbf{T}}^{(O)} = \dot{\mathbf{T}}^{(C)} \quad (55)$$

である。

3 相対 Kirchhoff 応力の速度

J_t は t の時間を基準とした微小領域の体積変化率である。 t における基準を計算しているので

$$J_t(t) = 1 \quad (56)$$

である。歪速度テンソル \mathbf{D} とすると、

$$\dot{J}_t = \text{tr} \mathbf{D} \quad (57)$$

が成り立つ。 t の時間を基準とした相対 kirchhoff 応力 $\hat{\mathbf{T}}$ は次のように表される。

相対 kirchhoff 応力

$$\hat{\mathbf{T}} = J_t \mathbf{T} \quad (58)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{T}}} = \dot{J}_t \mathbf{T} + J_t \dot{\mathbf{T}} = \mathbf{T} \text{tr} \mathbf{D} + \dot{\mathbf{T}} \quad (59)$$

3.0.1 相对 Kirchhoff 応力の Jauman 速度

$$\hat{\mathbf{T}}^{(J)} = \dot{\hat{\mathbf{T}}} - \mathbf{W} \cdot \hat{\mathbf{T}} - \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{W}^T \quad (60)$$

$$= \mathbf{T} \text{tr} \mathbf{D} + \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{W}^T \quad (61)$$

$$= \dot{\mathbf{T}}^{(J)} + \mathbf{T} \text{tr} \mathbf{D} \quad (62)$$

3.0.2 相对 Kirchhoff 応力の Oldroyd 速度

$$\hat{\mathbf{T}}^{(O)} = \dot{\hat{\mathbf{T}}} - \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{T}} - \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{L}^T \quad (63)$$

$$= \mathbf{T} \text{tr} \mathbf{D} + \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}^T \quad (64)$$

$$= \dot{\mathbf{T}}^{(O)} + \mathbf{T} \text{tr} \mathbf{D} \quad (65)$$

3.0.3 相对 Kirchhoff 応力の Cotter-Rivlin 速度

$$\hat{\mathbf{T}}^{(C)} = \dot{\hat{\mathbf{T}}} + \mathbf{L}^T \cdot \hat{\mathbf{T}} + \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{L} \quad (66)$$

$$= \mathbf{T} \text{tr} \mathbf{D} + \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{L} \quad (67)$$

$$= \dot{\mathbf{T}}^{(C)} + \mathbf{T} \text{tr} \mathbf{D} \quad (68)$$

3.0.4 相对 Kirchhoff 応力の Green-Nargdi 速度

$$\hat{\mathbf{T}}^{(G)} = \dot{\hat{\mathbf{T}}} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{T}} - \hat{\mathbf{T}} \cdot \boldsymbol{\Omega}^T \quad (69)$$

$$= \mathbf{T} \text{tr} \mathbf{D} + \dot{\mathbf{T}} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Omega}^T \quad (70)$$

$$= \dot{\mathbf{T}}^{(G)} + \mathbf{T} \text{tr} \mathbf{D} \quad (71)$$

3.0.5 Truesdell の応力速度

時刻 t を基準配置とした第二 Piola-Kirchhoff 応力の速度を Truesdell 応力速度と呼ぶ。時刻 t を基準とした相対変形勾配テンソル \mathbf{F}_t を考える

$$\mathbf{F}_t(t) = \mathbf{I} \quad (72)$$

$$\dot{\mathbf{F}}_t = \mathbf{L} \quad (73)$$

が成り立つ。この時、時刻 t を基準にした、第二 Piola-Kirchhoff 応力 \mathbf{S}_t は次のように定義される。

$$\mathbf{F}_t \cdot \mathbf{S}_t \cdot \mathbf{F}_t^T = J_t \mathbf{T} \quad (74)$$

であることがわかる。

$$\mathbf{S}_t(t) = \mathbf{T} \quad (75)$$

2 個上の式を両辺微分して比較してみよう。左辺は

$$(\mathbf{F}_t \cdot \mathbf{S}_t \cdot \mathbf{F}_t^T) \cdot = \dot{\mathbf{F}}_t \cdot \mathbf{S}_t \cdot \mathbf{F}_t^T + \mathbf{F}_t \cdot \dot{\mathbf{S}}_t \cdot \mathbf{F}_t^T + \mathbf{F}_t \cdot \mathbf{S}_t \cdot \dot{\mathbf{F}}_t^T \quad (76)$$

$$= \mathbf{L} \cdot \mathbf{T} + \dot{\mathbf{S}}_t + \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}^T \quad (77)$$

右辺は

$$(J_t \mathbf{T}) \cdot = \dot{J}_t \mathbf{T} + J_t \dot{\mathbf{T}} \quad (78)$$

$$= \mathbf{T} \text{tr} \mathbf{D} + \dot{\mathbf{T}} \quad (79)$$

よって両辺を比較すると次のようになる。

$$\dot{\mathbf{S}}_t = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}^T + \mathbf{T} \text{tr} \mathbf{D} \quad (80)$$

$$= \dot{\mathbf{T}}^{(0)} + \mathbf{T} \text{tr} \mathbf{D} \quad (81)$$

$$= \dot{\hat{\mathbf{T}}}^{(0)} \quad (82)$$

Truesdell 応力速度は相対 Kirchhoff 応力の Oldroyd 速度と等しいことがわかる。
Truesdell 応力速度と Jauman 速度は次のような関係がある。

$$\dot{\mathbf{S}}_t = \dot{\mathbf{T}}^{(O)} + \mathbf{TtrD} \quad (83)$$

$$= \dot{\mathbf{T}}^{(J)} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{TtrD} \quad (84)$$

3.1 まとめ

相対 Kirchhoff 応力と Cauchy 応力の各速度について次が成り立つことがわかる。

—— 相対 Kirchhoff 応力と Cauchy 応力の各種速度の関係 ——

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{\mathbf{T}}}^{(J)} = \dot{\mathbf{T}}^{(J)} + \mathbf{TtrD} \\ \dot{\hat{\mathbf{T}}}^{(O)} = \dot{\mathbf{T}}^{(O)} + \mathbf{TtrD} = \dot{\mathbf{S}}_t \\ \dot{\hat{\mathbf{T}}}^{(G)} = \dot{\mathbf{T}}^{(G)} + \mathbf{TtrD} \\ \dot{\hat{\mathbf{T}}}^{(C)} = \dot{\mathbf{T}}^{(C)} + \mathbf{TtrD} \end{array} \right. \quad (85)$$

4 応力速度の客観性

歪速度テンソルから応力速度テンソルを求める構成式を作る場合を考えよう。歪み速度テンソルには客観性があるので、応力速度テンソルにも客観性がなければならぬ。客観性がなければ、例えばある物体を違った角度から見ただけで応力が発生してしまうという矛盾を持ってしまう。

物体を異なる角度から見たときにテンソルがどのような変換を受けるのかということを調べるために、ある観測者から見た位置 \mathbf{x} が別の観測者から見ると \mathbf{x}^* の位置にあり、両者の関係が次のように表される場合を考えよう。

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{x} \quad (86)$$

これを図で表すと次のようになる。

さて、このような関係がある場合に相対的な位置を表すベクトルの変換を考えよう。

$$\mathbf{x}_2^* - \mathbf{x}_1^* = (\mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{x}_2) - (\mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{x}_1) \quad (87)$$

$$= \mathbf{Q}(t) (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \quad (88)$$

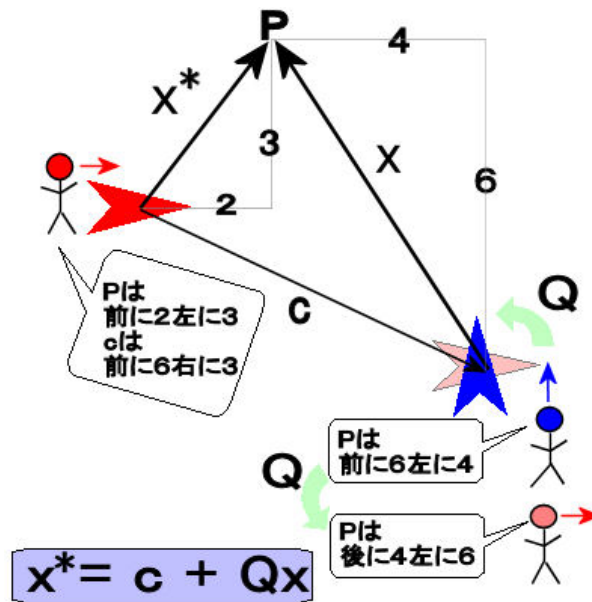


図 1: 2 人の観測者から見た P の位置の関係:各観測者から見たベクトルを (前, 左) のように表す. 画面右を向いている赤い人から見ると P の位置は $x^* = (2, 3)$ に、ベクトル c は $(6, -3)$ に見える. 画面上を向いている青い人からみると P の位置は $x = (6, 4)$ に見える. 青い人の向きは赤い人の向きを反時計回りに 90 度回転したものである. $Q = 90$ 度回転とする. 青い人の位置において赤い人の向きから見た P の位置は $Q \cdot x = (-4, 6)$ である. 結局赤い人から見た P の位置は $x^* = c + Q \cdot x = (6, -3) + (-4, 6) = (2, 3)$ となる.

が成り立つ。よって相対的な位置を表すベクトル \mathbf{b} が客観性を持つとき

$$\mathbf{b}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{b} \quad (89)$$

が成り立たなければならないことがわかる。ベクトル \mathbf{b} がテンソル \mathbf{K} によってベクトル \mathbf{c} に変換されるとしよう。

$$\mathbf{c}^* = \mathbf{K}^* \cdot \mathbf{b}^* \Leftrightarrow \mathbf{Q} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{K}^* \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{c} = (\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{K}^* \cdot \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{b} \quad (90)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{K}^* \cdot \mathbf{Q} \quad (91)$$

が成り立つ。よって、テンソル \mathbf{K} に客観性があるとすると、

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (92)$$

のような関係が成り立つ。ここで気をつけたいのは観測者の移動と基底ベクトルの回転は別の物だということだ。基底ベクトルを回転しても成分は変わるがテンソル自体は変わらない。観測者と観測対象の位置関係は相対的なものであるから、観測者の移動や回転は観測対象の移動や回転と同じ意味を持つ

4.1 各種テンソルの客観性

各種テンソルについて客観性があるのかどうか調べてみよう。

4.1.1 Cauchy 応力

Cauchy 応力は定義から次のように変換されるので、客観性がある。

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \mathbf{Q}^T \quad (93)$$

4.1.2 変形勾配テンソル

変形勾配テンソル \mathbf{F} について、

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} \quad (94)$$

が成り立つ。 \mathbf{F} を直交テンソル \mathbf{R} と正值対称テンソル \mathbf{U} に右極分解したものを $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$ 、

同じく、 \mathbf{F}^* を右極分解したものを $\mathbf{F}^* = \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{U}^*$ とする。

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{U}^* \quad (95)$$

となる。 $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}$ もまた直交テンソルであり、極分解が一意であるから

$$\mathbf{U}^* = \mathbf{U} \quad (96)$$

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \quad (97)$$

が成り立つ。

4.1.3 速度勾配テンソル

速度勾配テンソル (velocity gradient tensor) は、

$$\mathbf{L}^* = \dot{\mathbf{F}}^* \mathbf{F}^{*-1} = (\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{F}}) \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F})^{-1} \quad (98)$$

$$= (\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{F}}) \cdot (\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{Q}^{-1}) \quad (99)$$

$$= \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (100)$$

$$= \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (101)$$

ここで、

$$(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T) \cdot = \mathbf{I} = 0 = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^T \Leftrightarrow \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T = -\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^T \quad (102)$$

の関係を利用した。

4.1.4 歪み速度テンソル

歪み速度テンソル (strain rate tensor) は

$$\mathbf{D}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^* + \mathbf{L}^{*T}) \quad (103)$$

$$= \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^T + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{Q}^T) \quad (104)$$

$$= \frac{1}{2}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T) \cdot + \mathbf{Q} \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \cdot \mathbf{Q}^T \quad (105)$$

$$= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (106)$$

変形速度テンソル D には客観性があることがわかる。

4.1.5 回転速度テンソル

回転速度テンソル (rotation rate tensor) \mathbf{W} は

$$\mathbf{W}^* = \mathbf{L}^* - \mathbf{D}^* = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}^T - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (107)$$

$$= \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{L} - \mathbf{D}) \cdot \mathbf{Q}^T \quad (108)$$

$$= \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (109)$$

4.1.6 剛体回転速度テンソル

剛体回転速度テンソル $\mathbf{\Omega}$ は

$$\mathbf{\Omega}^* = \dot{\mathbf{R}}^* \cdot \mathbf{R}^{*T} \quad (110)$$

$$= (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}) \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R})^T \quad (111)$$

$$= (\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{R}) \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{Q}^T \quad (112)$$

$$= \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{Q}^T \quad (113)$$

$$= \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (114)$$

4.1.7 Cauchy 応力を時間微分したテンソルに客観性がない

$$\dot{\mathbf{T}}^* = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{T}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{T}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}\dot{\mathbf{Q}}^T \quad (115)$$

$$\neq \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{T}}\mathbf{Q}^T \quad (116)$$

よって、 $\dot{\mathbf{T}}$ には客観性がない。よって客観性のある歪速度テンソル \mathbf{D} と関連づけて構成式を作ることができないことがわかる。

4.2 Cauchy 応力の各種速度の客観性

Jauman 速度 $\dot{\mathbf{T}}^{(J)}$ 、Oldroyd 速度 $\dot{\mathbf{T}}^{(O)}$ 、Green-Nargdi 速度 $\dot{\mathbf{T}}^{(G)}$ 、Cotter-Rivelin 速度 $\dot{\mathbf{T}}^{(C)}$ はそれぞれ客観性をもつ。実際に計算を行うことでこれを確かめてみよう。

4.2.1 Cauchy 応力の Jauman 速度の客観性

$$\mathbf{W}^* = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{Q}^T = -\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^T + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (117)$$

であることを用いて

$$\dot{\mathbf{T}}^{(J)*} = \dot{\mathbf{T}}^* - \mathbf{W}^* \cdot \mathbf{T}^* + \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{W}^* \quad (118)$$

$$= \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{T}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{T}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}\dot{\mathbf{Q}}^T \quad (119)$$

$$-(\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{Q}^T) \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (120)$$

$$+\mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot (-\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^T + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{Q}^T) \quad (121)$$

$$= \mathbf{Q} \cdot (\dot{\mathbf{T}} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{W}) \cdot \mathbf{Q}^T \quad (122)$$

$$= \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{T}}^{(J)} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (123)$$

Cauchy 応力の Jauman 速度には客観性があることがわかる。

4.2.2 Cauchy 応力の Oldroyd 速度の客観性

$$\mathbf{L}^* = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}^T = -\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^T + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (124)$$

であることを用いて

$$\dot{\mathbf{T}}^{(O)*} = \dot{\mathbf{T}}^* - \mathbf{L}^* \cdot \mathbf{T}^* - \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{L}^{*T} \quad (125)$$

$$= \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{T}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{T}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}\dot{\mathbf{Q}}^T \quad (126)$$

$$- (\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}^T) \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (127)$$

$$- \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot (-\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^T + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{Q}^T) \quad (128)$$

$$= \mathbf{Q} \cdot (\dot{\mathbf{T}} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}^T) \cdot \mathbf{Q}^T \quad (129)$$

$$= \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{T}}^{(O)} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (130)$$

Cauchy 応力の Oldroyd 速度には客観性があることがわかる。

4.2.3 Cauchy 応力の Cotter-Rivlin 速度の客観性

$$\mathbf{L}^* = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}^T = -\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^T + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (131)$$

であることを用いて

$$\dot{\mathbf{T}}^{(C)*} = \dot{\mathbf{T}}^* + \mathbf{L}^{*T} \cdot \mathbf{T}^* + \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{L}^* \quad (132)$$

$$= \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{T}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{T}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}\dot{\mathbf{Q}}^T \quad (133)$$

$$+ (-\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{Q}^T) \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (134)$$

$$+ \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot (\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^T + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}^T) \quad (135)$$

$$= \mathbf{Q} \cdot (\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}) \cdot \mathbf{Q}^T \quad (136)$$

$$= \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{T}}^{(C)} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (137)$$

Cauchy 応力の Cotter-Rivlin 速度には客観性があることがわかる。

4.2.4 Cauchy 応力の Green-Nargdi 速度の客観性

$$\mathbf{\Omega}^* = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (138)$$

$$= -\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^T + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (139)$$

であることを用いて

$$\dot{\mathbf{T}}^{(G)*} = \dot{\mathbf{T}}^* - \mathbf{\Omega}^* \cdot \mathbf{T}^* + \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{\Omega}^* \quad (140)$$

$$= \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{T} \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{T}} \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \dot{\mathbf{Q}}^T \quad (141)$$

$$- (\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{Q}^T) \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (142)$$

$$+ \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot (-\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^T + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{Q}^T) \quad (143)$$

$$= \mathbf{Q} \cdot (\dot{\mathbf{T}} - \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{\Omega}) \cdot \mathbf{Q}^T \quad (144)$$

$$= \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{T}}^{(G)} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (145)$$

Cauchy 応力の Green-Nargdi 速度には客観性があることがわかる。

4.3 Kirchhoff 応力の各種速度の客観性

$$\text{tr} \mathbf{D}^* = \text{tr}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^T) = \text{trace}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{D}) = \text{tr} \mathbf{D} \quad (146)$$

$$(\mathbf{T} \text{tr} \mathbf{D})^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T \text{tr} \mathbf{D} = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{T} \text{tr} \mathbf{D}) \cdot \mathbf{Q}^T \quad (147)$$

よって $\mathbf{T} \text{tr} \mathbf{D}$ には客観性があることがわかる。そこで相対 Kirchhoff 応力の各種速度について

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{T}}}^{(J)} = \dot{\mathbf{T}}^{(J)} + \mathbf{T} \text{tr} \mathbf{D} \\ \dot{\hat{\mathbf{T}}}^{(O)} = \dot{\mathbf{T}}^{(O)} + \mathbf{T} \text{tr} \mathbf{D} \\ \dot{\hat{\mathbf{T}}}^{(G)} = \dot{\mathbf{T}}^{(G)} + \mathbf{T} \text{tr} \mathbf{D} \\ \dot{\hat{\mathbf{T}}}^{(C)} = \dot{\mathbf{T}}^{(C)} + \mathbf{T} \text{tr} \mathbf{D} \end{cases} \quad (148)$$

が成り立ち、 $\dot{\mathbf{T}}^{(J)}$, $\dot{\mathbf{T}}^{(O)}$, $\dot{\mathbf{T}}^{(G)}$, $\dot{\mathbf{T}}^{(C)}$ はそれぞれ客観性をもつので、相対 kirchhoff 応力の各種速度 $\dot{\hat{\mathbf{T}}}^{(J)}$, $\dot{\hat{\mathbf{T}}}^{(O)}$, $\dot{\hat{\mathbf{T}}}^{(G)}$, $\dot{\hat{\mathbf{T}}}^{(C)}$ もまた客観性を持つ。Truesdell 応力速度 $\dot{\mathbf{S}}_r$ は相対 Kirchhoff 応力の Oldroyd 速度 $\dot{\hat{\mathbf{T}}}^{(O)}$ に等しかったので客観性を持つ。

5 参考にしたもの

[1], [2], [3], [4], [5]

参考文献

- [1] 渡辺浩志：非線形有限要素法特論, <http://www.sml.k.u-tokyo.ac.jp/members/nabe/>.
- [2] 久田俊明, 野口裕久：非線形有限要素法の基礎と応用, 丸善 (1996).
- [3] 久田俊明：非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎, 丸善 (1999).
- [4] Simo, J. and Hughes, T.: *Computational Inelasticity (Interdisciplinary Applied Mathematics)* (v. 7), Springer, corrected edition (1998).
- [5] Belytschko, T., Liu, W. K. and Moran, B.: *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, Wiley, 1 edition (2000).