Rigid Body Dynamics*

Nobuyuki Umetani

平成 23 年 9 月 4 日

目次

*これは忘れっぽい著者が昔勉強したことを書き留めておく備忘録です．きっと間違えを多く含んでいます．すいません．ご指摘ご意見などありましたら教えてもらえると有り難いです．

1 概要

3 次元の剛体の運動について定式化する．弾性体は無数の質点が連続的にそれぞれ変位を持ち，変位場を計算機内で表現するためには離散化が必要であるが，剛体は内部で歪が発生しないので，自由度は並進と回転の 6 自由度だけで完全に状態を記述することができる．最初に軸性ベクトルについて解説する．回転行列は

この軸性ベクトルを使って書くことができる．また回転行列を簡潔に表す回転パラメータについて説明する．軸性ベクトルと回転行列を使うことで，回転行列や角速度の変分を定式化することができる．これらを用いてハミルトン原理により運動方程式を導出する．最後に運動方程式の増分計算を解説する．

2　表記と数学的準備

ベクトルにチルダをつけるたものは，次のような3x3の反対称行列(Skew-symmetric matrix,Antisymmetric matrix)を表すとする．

$$\tilde{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

外積(Exterior Product)の記号を用いれば，

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b} \tag{2}$$

が成り立つことが分かる．成分ごとに書くと次のようになる．

$$\tilde{\mathbf{a}} = -\epsilon_{ijk} a_k \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \tag{3}$$

ここで ϵ は**レヴィ＝チヴィタの記号(Levi-Civita symbol)**である．チルダのついたベクトルと作用するベクトルを入れ替えると符号が逆転することが次から分かる．

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b} &= \begin{Bmatrix} -a_3 b_2 + a_2 b_3 \\ +a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ -a_2 b_1 + a_1 b_2 \end{Bmatrix} && (4) \\ &= -\begin{Bmatrix} -b_3 a_2 + b_2 a_3 \\ +b_3 a_1 - b_1 a_3 \\ -b_2 a_1 + b_1 a_2 \end{Bmatrix} && (5) \\ &= -\tilde{\mathbf{b}}\mathbf{a} && (6) \\ \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b} &= -\tilde{\mathbf{b}}\mathbf{a} && (7) \end{aligned}$$

また，チルダをつけた行列に左からベクトルを作用させた場合にも明らかに次のような変換が成り立つ

$$\mathbf{a}^T\tilde{\mathbf{b}} = -\mathbf{b}^T\tilde{\mathbf{a}} \tag{8}$$

チルダをつけたベクトル同士の積は次のようになる．

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{b}} &= \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix} && (9)\\
&= \begin{bmatrix} -a_2b_2 - a_3b_3 & a_2b_1 & a_3b_1 \\ a_1b_2 & -a_1b_1 - a_3b_3 & a_3b_2 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & -a_1b_1 - a_2b_2 \end{bmatrix} && (10)\\
&= \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 \end{bmatrix} - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} && (11)\\
&= \mathbf{b}\mathbf{a}^T - (\mathbf{a}^T\mathbf{b})I && (12)
\end{aligned}$$

これを用いて，ベクトルにチルダをつけたベクトルを作用させたベクトルにもう一度チルダをつけた行列について計算してみよう．

$$\begin{aligned}
\widetilde{\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b}} &= \begin{bmatrix} 0 & a_2b_1 - a_1b_2 & +a_3b_1 - a_1b_3 \\ -a_2b_1 + a_1b_2 & 0 & +a_3b_2 - a_2b_3 \\ -a_3b_1 + a_1b_3 & -a_3b_2 + a_2b_3 & 0 \end{bmatrix} && (13)\\
&= \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix} && (14)\\
&= \mathbf{b}\mathbf{a}^T - \mathbf{a}\mathbf{b}^T = 2asym(\mathbf{b}^T\mathbf{a}) && (15)\\
&= \{\mathbf{b}\mathbf{a}^T - (\mathbf{a}^T\mathbf{b})I\} - \{\mathbf{a}\mathbf{b}^T - (\mathbf{b}^T\mathbf{a})I\} && (16)\\
&= \tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{b}} - \tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{a}} && (17)
\end{aligned}$$

これは

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{v} &= -\mathbf{v}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) && (18)\\
&= \mathbf{v}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{a}) && (19)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbf{b}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}) - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a} &(20)\\
&= \{\mathbf{b}\mathbf{a}^T - \mathbf{a}\mathbf{b}^T\}\mathbf{v} &(21)
\end{aligned}
$$

が成り立つことに対応している．この関係を用いて複数回同じ外積を作用させる処理を計算してみよう．

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{v})) &= \mathbf{a}\times\{\mathbf{a}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})\mathbf{v}\} &(22)\\
&= (\mathbf{a}\times\mathbf{a})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{a}\times\mathbf{v}) &(23)\\
&= -|a|^2(\mathbf{a}\times\mathbf{v}) &(24)
\end{aligned}
$$

となる．２回同じ外積 $\tilde{\mathbf{a}}$ を作用させると，$-|a|^2$ だけスカラー倍されることが分かる．よって、

$$\tilde{\mathbf{a}}^3 = \tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{a}} = -|a|^2\tilde{\mathbf{a}} \tag{25}$$

$$\tilde{\mathbf{a}}^4 = -|a|^2\tilde{\mathbf{a}}^2 \tag{26}$$

となる。繰り返しこれを用いると、

$$
\left\{
\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{a}}^{2n-1} &= (-1)^{n-1}|a|^{2(n-1)}\tilde{\mathbf{a}}\\
\tilde{\mathbf{a}}^{2n} &= (-1)^{n-1}|a|^{2(n-1)}\tilde{\mathbf{a}}^2
\end{aligned}
\right. \tag{27}
$$

が成り立つ．

行列式が 1 の直交行列 (つまり回転)$\mathbf{R}$ に対して，

$$(\mathbf{R}\mathbf{e}_1)\times(\mathbf{R}\mathbf{e}_2) = \mathbf{R}(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2) = \mathbf{R}\mathbf{e}_3 \tag{28}$$

が成り立つののでで，これを用いると，

$$\widetilde{\mathbf{R}\mathbf{v}} = \mathbf{R}\tilde{v}\mathbf{R}^T \tag{29}$$

が成り立つことが容易に分かる．一般的な直交行列 V $(V^{-1} = V^T)$ による変換に対してはこの限りではない．鏡像変換を含む変換 $(\det V = -1)$ については次のように符号が反転してしまうことが分かる．

$$\widetilde{Vu} = -V\tilde{u}V^T \tag{30}$$

正確にはこのような性質を持ったベクトルを**擬ベクトル**という．

3　回転のパラメータ化

３次元の回転は，３次元ベクトルから３次元ベクトルへの線形変換なので 3x3 の行列として表されるが，直交性を持つという制約のために行列の９成分は独立した任意の値を取ることができず，より少ない数のパラメータで表すことができる．一般的には３つか４つのパラメータを使って表現することができる．

回転をパラーメータ化することは変数を減らすだけでなく補間にも重要である．ある回転と，ある回転の中間の回転を求めたい場合，回転行列を平均することはできない．二つの回転行列の成分を平均したものは，もはや回転行列にならないためである．しかしながらパラーメータはいつも回転行列に変換できるので，パラメータを平均してそこから中間の回転行列を求めることが可能である．

以下に代表的なパラメータのとり方を挙げる．

- Eular angle (オイラー角)
- Bryant angle (ブライアント角)
- Cartesian rotation vector (デカルト回転ベクトル)
- Rodrigues parameter
- Eular parameter (四元数，Quaternion)
- Conformal Rotation Vector (CRV)

Eular Angle と Bryant Angle は，物体上の正規座標軸や空間上の３つの座標軸に沿って物体をどれだけ回転させるかというパラメータ化の方法を取るのに対して，Cartesian rotation vector や Rodrigues parameter や Eular parameter や Conformal rotation vector は物体をあるベクトルの周りに回転させるという方法でパラメータ化する．直感的に理解しやすいのは前者であるがジンバルロックなどの問題があるので，一般的には計算の内部では後者のパラメータを使う．

以下，それぞれのパラメータについて説明する．

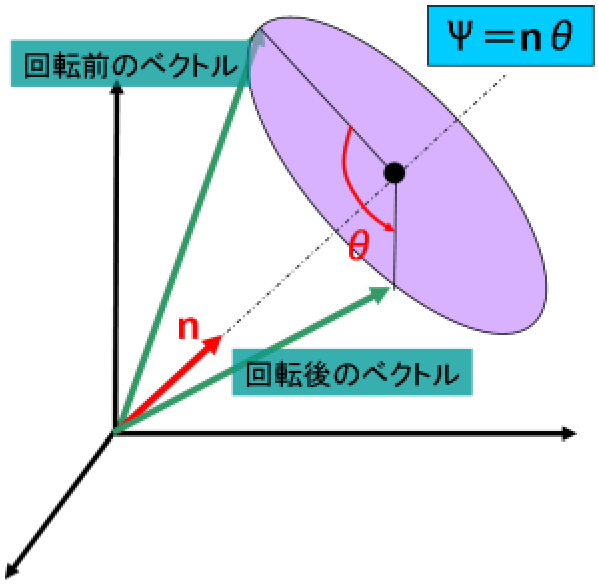

図 1: Cartesian Rotation Vector によるベクトルの回転

3.1 Cartesian Rotation Vector

次のようなベクトル $\boldsymbol{\Psi}$ が単位ベクトル $\mathbf{n}$ のまわりに θ だけ回転した回転を表すとする．

$$\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{n}\theta \tag{31}$$

回転行列は次のように書ける．

回転行列

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \sin\theta\tilde{\mathbf{n}} + (1 - \cos\theta)\tilde{\mathbf{n}}\tilde{\mathbf{n}} \tag{32}$$

3.1.1 微小回転近似

$|\Psi| = \theta << 1$ の時は微小回転 (Infinitesimal rotation)．この時，$\sin(\theta) \simeq \theta, (1 - \cos(\theta)) \simeq \theta^2/2$ が成り立つので，回転行列は次のように近似することができる．

$$\mathbf{R} \simeq \mathbf{I} + \theta\tilde{\mathbf{n}} + \frac{\theta^2}{2}\tilde{\mathbf{n}}\tilde{\mathbf{n}} \quad = \quad \mathbf{I} + \tilde{\boldsymbol{\Psi}} + \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\Psi}}\tilde{\boldsymbol{\Psi}} \tag{33}$$

$$= \quad \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{\Psi}} - \frac{1}{2}|\Psi|^2\mathbf{I} \tag{34}$$

$$= \quad \left(1 - \frac{1}{2}|\Psi|^2\right)\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{\Psi}} \tag{35}$$

この近似は２次精度であるが，単純に１次精度を考えて $(1 - \cos(\theta)) \simeq 0$ とすると，次のように近似できる．

微小回転近似 (１次精度)

$$\mathbf{R} \simeq \mathbf{I} + \theta\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{\Psi}} \tag{36}$$

3.1.2 Rodrigue's rotation formula

この式に $\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{a}\mathbf{b}^T - (\mathbf{a}^T\mathbf{b})\mathbf{I}$ を用いると回転行列は次のようにも式変形できる．

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \mathbf{I} + \sin\theta\tilde{\mathbf{n}} + (1 - \cos\theta)(\mathbf{n}\mathbf{n}^T - ||\mathbf{n}||^2\mathbf{I}) & (37)\\ &= \cos\theta\mathbf{I} + \sin\theta\tilde{\mathbf{n}} + (1 - \cos\theta)\mathbf{n}\mathbf{n}^T & (38)\end{aligned}$$

この式はロドリゲスの回転公式 (Rodrigue's rotation formula) と呼ばれる．

Rodrigue's rotation formula

$$\mathbf{R} = \cos\theta\mathbf{I} + \sin\theta\tilde{\mathbf{n}} + (1 - \cos\theta)\mathbf{n}\mathbf{n}^T \tag{39}$$

3.1.3 指数関数としての回転行列

回転行列は次のように，無限に小さな微小回転の集合によるとも解釈できる．これは作用素が指数の肩に乗ったものの定義から次のように書ける．

$$\mathbf{R}(\mathbf{\Psi}) = \lim_{n\to\infty}\left\{1 + \frac{1}{n}\tilde{\mathbf{\Psi}}\right\}^n = exp\tilde{\mathbf{\Psi}} \tag{40}$$

さて以下のように式変形すると，この指数関数を使った回転の定義も同じ回転行列を与えることが分かる．但し，ここでは $\tilde{\mathbf{\Psi}}\tilde{\mathbf{\Psi}} = -|\Psi|^2\mathbf{I}$ の関係式を用いている．

$$\mathbf{R}(\mathbf{\Psi}) \quad = \quad exp\tilde{\mathbf{\Psi}} = I + \frac{1}{1!}\tilde{\mathbf{\Psi}} + \frac{1}{2!}\tilde{\mathbf{\Psi}}^2 + \frac{1}{3!}\tilde{\mathbf{\Psi}}^3 + \cdots \tag{41}$$

$$
\begin{aligned}
&= I + \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!}\theta^2 + \frac{1}{5!}\theta^4 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\theta^{2(n-1)} + \cdots\right)\tilde{\mathbf{\Psi}} && (42)\\
&\quad + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{4!}\theta^2 + \frac{1}{6!}\theta^4 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}\theta^{2(n-1)} + \cdots\right)\tilde{\mathbf{\Psi}}^2 && (43)\\
&= I + \left(\frac{1}{1!}\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\theta^{2n-1} + \cdots\right)\tilde{\mathbf{\Psi}}/\theta && (44)\\
&\quad + \left(\frac{1}{2!}\theta^2 - \frac{1}{4!}\theta^4 + \frac{1}{6!}\theta^6 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}\theta^{2n} + \cdots\right)\tilde{\mathbf{\Psi}}^2/\theta^2 && (45)\\
&= \mathbf{I} + \sin\theta\tilde{\mathbf{n}} + (1-\cos\theta)\tilde{\mathbf{n}}\tilde{\mathbf{n}} && (46)
\end{aligned}
$$

3.1.4 Cartesian Rotation Vector から，回転行列を得る C++コードの例

Cartesian Rotation Vector $\mathbf{\Psi}$ から，回転行列 $\mathbf{R}$ を求める C++プログラムの例を挙げる．

- mat[i*3+j]=R_{ij}
- vec[i]=Ψ_i

```
#include <math.h>

void SetRotMatrix_Cartesian(double mat[], const double vec[]){
  const double sqt = vec[0]*vec[0]+vec[1]*vec[1]+vec[2]*vec[2];
  if( sqt < 1.0e-20 ){ // infinitesmal rotation approximation
    mat[0] = 1;       mat[1] = -vec[2]; mat[2] = +vec[1];
    mat[3] = +vec[2]; mat[4] = 1;       mat[5] = -vec[0];
    mat[6] = -vec[1]; mat[7] = +vec[0]; mat[8] = 1;
    return;
  }
  const double t = sqrt(sqt);
  const double invt = 1.0/t;
  const double n[3] = { vec[0]*invt, vec[1]*invt, vec[2]*invt };
  const double c0 = cos(t);
  const double s0 = sin(t);
  mat[0*3+0] = c0        +(1-c0)*n[0]*n[0];
  mat[0*3+1] =   -n[2]*s0+(1-c0)*n[0]*n[1];
  mat[0*3+2] =   +n[1]*s0+(1-c0)*n[0]*n[2];
  mat[1*3+0] =   +n[2]*s0+(1-c0)*n[1]*n[0];
  mat[1*3+1] = c0        +(1-c0)*n[1]*n[1];
  mat[1*3+2] =   -n[0]*s0+(1-c0)*n[1]*n[2];
  mat[2*3+0] =   -n[1]*s0+(1-c0)*n[2]*n[0];
  mat[2*3+1] =   +n[0]*s0+(1-c0)*n[2]*n[1];
  mat[2*3+2] = c0        +(1-c0)*n[2]*n[2];
}
```

3.2 ロドリゲス・パラメータ (Rodrigues Parameters)

$$\mathbf{w} = 2\tan(\theta/2)\mathbf{n} = \frac{2\tan(\theta/2)}{\theta}\boldsymbol{\Psi} \tag{47}$$

$\mathbf{w}$ を使った回転は次のようになる。

回転行列

$$R = I + \frac{1}{1+0.25|\omega|^2}\{\tilde{\omega} + \frac{1}{2}\tilde{\omega}\tilde{\omega}\} \tag{48}$$

θ を使った時と比べて $\sin(\theta)$ などの項が消えて扱いが楽になる。

3.2.1 合成則

$$R(\omega_2)R(\omega_1) = R(\omega_{12}) \tag{49}$$

$$\mathbf{w}_{12} = \frac{\omega_1 + \omega_2 - \frac{1}{2}\omega_1 \times \omega_2}{1 - \frac{1}{4}\omega_1^T\omega_2} \tag{50}$$

3.2.2 Rodrigues パラメータから回転行列を導出する C++コード例

Cartesian Rotation Vector $\mathbf{w}$ から，回転行列 $\mathbf{R}$ を求める C++プログラムの例を挙げる.

- mat[i*3+j]=R_{ij}
- vec[i]=w_i

```
void SetRotMatrix_Rodrigues(double mat[], const double vec[]){
  const double sqlen = vec[0]*vec[0]+vec[1]*vec[1]+vec[2]*vec[2];
  const double tmp1 = 1.0/(1+0.25*sqlen);
  mat[0] = 1+tmp1*(       +0.5*vec[0]*vec[0]-0.5*sqlen);
  mat[1] =  +tmp1*(-vec[2]+0.5*vec[0]*vec[1]          );
  mat[2] =  +tmp1*(+vec[1]+0.5*vec[0]*vec[2]          );
  mat[3] =  +tmp1*(+vec[2]+0.5*vec[1]*vec[0]          );
  mat[4] = 1+tmp1*(       +0.5*vec[1]*vec[1]-0.5*sqlen);
  mat[5] =  +tmp1*(-vec[0]+0.5*vec[1]*vec[2]          );
  mat[6] =  +tmp1*(-vec[1]+0.5*vec[2]*vec[0]          );
  mat[7] =  +tmp1*(+vec[0]+0.5*vec[2]*vec[1]          );
  mat[8] = 1+tmp1*(       +0.5*vec[2]*vec[2]-0.5*sqlen);
}
```

3.3 Eular Parmeter (オイラー・パラメータ，四元数)

Eularパラメータは，次のようにCartesian Rotation Vectorの回転角の半角の余弦と，Cartesian Rotation Vectorを$\sin\frac{\theta}{2}/\theta$倍だけスケールしたベクトルの4変数の量である．

$$e_0 = \cos\frac{\theta}{2}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{n}\sin\frac{\theta}{2} \tag{51}$$

これは，e_0を実部，$\mathbf{e}$を虚部とする四元数と等しい．

e_0と$\mathbf{e}$との間には次の関係式が成り立つ．

$$e_0^2 = 1 - \|\mathbf{e}\|^2 \tag{52}$$

また，Rodriguesパラメータとの間には次のような関係式が成り立つ．

$$\omega = \frac{2}{e_0}\mathbf{e} \tag{53}$$

回転行列は次のようになる．

回転行列

$$\mathbf{R} = (2e_0^2 - 1)\mathbf{I} + 2\mathbf{e}\mathbf{e}^T + 2e_0\tilde{\mathbf{e}} \tag{54}$$

3.3.1 回転行列からEularパラメータの導出1

$$\mathrm{tr}\mathbf{R} = 3 \times (2\mathbf{e}_0^2 - 1) + 2|\|\mathbf{e}\|^2 = 4e_0^2 - 1 \tag{55}$$

$$e_0 = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \mathrm{tr}\mathbf{R}} \tag{56}$$

$$r_{kk} = (2e_0^2 - 1) + 2e_k^2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\mathbf{R} - \frac{1}{2} + 2e_k^2 \quad \Rightarrow \quad |e_k| = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 2r_{kk} - \mathrm{tr}\mathbf{R}} \tag{57}$$

$$vect(\mathbf{R}) = 2e_0\mathbf{e} \tag{58}$$

$$e_k = \frac{1}{2}sign(vect(\mathbf{R})_k)\sqrt{1 + 2r_{kk} - \mathrm{tr}\mathbf{R}} \tag{59}$$

3.3.2 回転行列から Eular パラメータの導出２

上のやり方よりも更に精度が高いのは以下の方法である．次のような行列 **S** を考える．

$$
S = 4\{e_0, \mathbf{e}\}^T\{e_0, \mathbf{e}\} = 4\begin{bmatrix} e_0^2 & e_0e_1 & e_0e_2 & e_0e_3 \\ e_1e_0 & e_1^2 & e_1e_2 & e_1e_3 \\ e_2e_0 & e_2e_1 & e_2^2 & e_2e_3 \\ e_3e_0 & e_3e_1 & e_3e_2 & e_3^2 \end{bmatrix} \tag{60}
$$

行列 **S** は次のようにして作ることができる．

$$
\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 + r_{11} + r_{22} + r_{33} & r_{32} - r_{23} & r_{13} - r_{31} & r_{21} - r_{12} \\ r_{32} - r_{23} & 1 + r_{11} - r_{22} - r_{33} & r_{12} + r_{21} & r_{13} + r_{31} \\ r_{13} - r_{31} & r_{21} + r_{12} & 1 - r_{11} + r_{22} - r_{33} & r_{23} + r_{32} \\ r_{21} - r_{12} & r_{13} + r_{31} & r_{23} + r_{32} & 1 - r_{11} - r_{22} + r_{33} \end{bmatrix} \tag{61}
$$

このとき，次のようにして，オイラーパラメータを求めることができる．

$$
S_{ii} = \max_k\{S_{kk}\} \Rightarrow \begin{cases} e_i = \frac{1}{2}\sqrt{S_{ii}} \\ e_k = \frac{S_{ii}}{4e_i} \end{cases} \tag{62}
$$

3.3.3 回転行列から Eular Paramter を導出する C++コードの例

```
void GetCRV_RotMatrix(double eparam[], const double mat[]) const{
  const double smat[16] = {
    1+mat[0*3+0]+mat[1*3+1]+mat[2*3+2],
    mat[2*3+1]-mat[1*3+2],
    mat[0*3+2]-mat[2*3+0],
    mat[1*3+0]-mat[0*3+1],
    mat[2*3+1]-mat[1*3+2],
    1+mat[0*3+0]-mat[1*3+1]-mat[2*3+2],
    mat[0*3+1]+mat[1*3+0],
    mat[0*3+2]+mat[2*3+0],
    mat[0*3+2]-mat[2*3+0],
    mat[1*3+0]+mat[0*3+1],
    1-mat[0*3+0]+mat[1*3+1]-mat[2*3+2],
    mat[1*3+2]+mat[2*3+1],
    mat[1*3+0]-mat[0*3+1],
    mat[0*3+2]+mat[2*3+0],
    mat[1*3+2]+mat[2*3+1],
    1-mat[0*3+0]-mat[1*3+1]+mat[2*3+2],
  };

```

```
  unsigned int imax;
  imax = ( smat[0    *4+    0] > smat[1*4+1] ) ? 0    : 1;
  imax = ( smat[imax*4+imax] > smat[2*4+2] ) ? imax : 2;
  imax = ( smat[imax*4+imax] > smat[3*4+3] ) ? imax : 3;

  double eparam[4];  // eular param
  eparam[imax] = 0.5*sqrt(smat[imax*4+imax]);
  for(unsigned int k=0;k<4;k++){
    if( k==imax ) continue;
    eparam[k] = smat[imax*4+k]*0.25/eparam[imax];
  }
```

3.4 Conformal Rotation Vector (CRV)

Conformal Rotation Vector (CRV) は

$$\mathbf{c} = 4\mathbf{n}\tan\frac{\theta}{4} \tag{63}$$

Eular パラメータとの間には次の関係式が成り立つ.

$$c_i = \frac{4e_i}{1+e_0} \quad (i=0,1,2,3) \tag{64}$$

$$c_0 = \frac{1}{8}(16 - \|\mathbf{c}\|^2) \tag{65}$$

これを用いると回転行列は次のように書ける

回転行列

$$\mathbf{R} = \frac{1}{(4-c_0)^2}\left[(c_0^2 + 8c_0 - 16)\mathbf{I} + 2\mathbf{c}\mathbf{c}^T + 2c_0\tilde{\mathbf{c}}\right] \tag{66}$$

```
void SetRotMatrix_CRV(double mat,const double crv[]){
  const double c0 = 0.125*( 16.0 - crv[0]*crv[0] - crv[1]*crv[1] - crv[2]*crv[2] );
  const double tmp = 1.0/( (4.0-c0)*(4.0-c0) );
  mat[0*3+0] = tmp*( (c0*c0+8*c0-16) + 2*crv[0]*crv[0] );
  mat[0*3+1] = tmp*(                   2*crv[0]*crv[1] - 2*c0*crv[2] );
  mat[0*3+2] = tmp*(                   2*crv[0]*crv[2] + 2*c0*crv[1] );
  mat[1*3+0] = tmp*(                   2*crv[1]*crv[0] + 2*c0*crv[2] );
  mat[1*3+1] = tmp*( (c0*c0+8*c0-16) + 2*crv[1]*crv[1] );
  mat[1*3+2] = tmp*(                   2*crv[1]*crv[2] - 2*c0*crv[0] );
  mat[2*3+0] = tmp*(                   2*crv[2]*crv[0] - 2*c0*crv[1] );
  mat[2*3+1] = tmp*(                   2*crv[2]*crv[1] + 2*c0*crv[0] );
  mat[2*3+2] = tmp*( (c0*c0+8*c0-16) + 2*crv[2]*crv[2] );
}
```

3.5 Bryant Angle (ブライアント角)

空間に固定された直交座標系の周りに回転させるのが Bryant Angle のやり方である．

Bryant Angle(ϕ, ψ, θ) は空間の座標軸 $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ について順番に ϕ, ψ, θ だけ回転させたときの回転を表している．

1. $\mathbf{X}$ 軸周りに ϕ だけ回転
2. $\mathbf{Y}$ 軸周りに ψ だけ回転
3. $\mathbf{Z}$ 軸周りに θ だけ回転

軸 $\mathbf{v}$ 周りに θ だけ回転させるような行列を $\mathbf{R}(\mathbf{v}, \theta)$ と書くするとき，回転行列 $\mathbf{R}$ は次のようになる．

回転行列

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(Z, \theta)\mathbf{R}(\mathbf{Y}, \psi)\mathbf{R}(\mathbf{X}, \phi) \tag{67}$$

3.6 Eular Angle (オイラー角)

物体に固定された直行座標軸の周りに回転させるのがオイラー角のやり方である．

3.6.1 Eular Angle の定義

物質に固定された座標軸が (x, y, z) として，空間に固定された座標軸 (X, Y, Z) に回転前の状態で一致しているとする．オイラー角 (ψ, θ, ϕ) は次のように定義される

1. z 周りに ψ だけ回転する．座標軸は $(X, Y, Z) \rightarrow (x', y', z')$ へ回転される
2. 次に x' 周りに θ だけ回転させる．$(x', y', z') \rightarrow (x'', y'', z'')$ へ回転される
3. 次に z'' 周りに ϕ だけ回転させる．$(x'', y'', z'') \rightarrow (x, y, z)$ へ回転される

3.6.2 Eular Angle の回転行列の導出

Eular 角では回転された軸周りの回転を求めるのであった．軸 $\mathbf{R}_1\mathbf{v}$ 周りに θ だけ回転するような行列 $\mathbf{R}(\mathbf{R}_1\mathbf{v},\theta)$ を考えよう．この場合次が成り立つ．

$$\mathbf{R}(\mathbf{R}_1\mathbf{v},\theta) = \mathbf{R}_1\mathbf{R}(\mathbf{v},\theta)\mathbf{R}_1^T \tag{68}$$

これを利用してオイラー角の回転行列を導出してみよう．

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \mathbf{R}(\mathbf{Z},\psi)\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \tag{69}$$

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{Bmatrix} &= \mathbf{R}(\mathbf{x}',\theta)\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} && (70)\\
&= \mathbf{R}\left(\mathbf{R}(\mathbf{Z},\psi)\mathbf{x},\theta\right)\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} && (71)\\
&= \mathbf{R}(\mathbf{Z},\psi)\mathbf{R}\left(\mathbf{X},\theta\right)\mathbf{R}^T(\mathbf{Z},\psi)\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} && (72)\\
&= \mathbf{R}(\mathbf{Z},\psi)\mathbf{R}\left(\mathbf{X},\theta\right)\mathbf{R}^T(\mathbf{Z},\psi)\mathbf{R}(\mathbf{Z},\psi)\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} && (73)\\
&= \mathbf{R}(\mathbf{Z},\psi)\mathbf{R}\left(\mathbf{X},\theta\right)\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} && (74)\\
&= \mathbf{R}_1\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} && (75)
\end{aligned}$$

但し，次のように回転行列 $\mathbf{R}_1$ を定めた．

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}(\mathbf{Z},\psi)\mathbf{R}\left(\mathbf{X},\theta\right) \tag{76}$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \mathbf{R}(\mathbf{z}'', \phi) \begin{Bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{Bmatrix} \tag{77}$$

$$= \mathbf{R}\left(\mathbf{R}_1 \mathbf{Z}, \phi\right) \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} \tag{78}$$

$$= \mathbf{R}_1 \mathbf{R}\left(\mathbf{Z}, \phi\right) \mathbf{R}_1^T \begin{Bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{Bmatrix} \tag{79}$$

$$= \mathbf{R}_1 \mathbf{R}\left(\mathbf{Z}, \phi\right) \mathbf{R}_1^T \mathbf{R}_1 \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \tag{80}$$

$$= \mathbf{R}_1 \mathbf{R}\left(\mathbf{Z}, \phi\right) \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \tag{81}$$

$$= \mathbf{R}(\mathbf{Z}, \psi) \mathbf{R}\left(\mathbf{X}, \theta\right) \mathbf{R}\left(\mathbf{Z}, \phi\right) \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \tag{82}$$

よって回転行列 $\mathbf{R}$ は次のようになる．

回転行列

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{Z}, \psi)\mathbf{R}(\mathbf{X}, \theta)\mathbf{R}(\mathbf{Z}, \phi) \tag{83}$$

Z 軸周りに θ だけ回転する回転行列 $\mathbf{R}(\mathbf{Z}, \theta)$ は

$$\mathbf{R}(\mathbf{Z}, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{84}$$

同様に X 軸周りに θ だけ回転する回転行列 $\mathbf{R}(\mathbf{X}, \theta)$ は

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{85}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{Z},\psi)\mathbf{R}(\mathbf{X},\theta)\mathbf{R}(\mathbf{Z},\phi) \tag{86}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{87}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\cos\theta\sin\phi & -\cos\psi\sin\phi - \sin\psi\cos\theta\sin\phi & \sin\psi\sin\theta \\ \sin\psi\cos\phi + \cos\psi\cos\theta\sin\phi & -\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & -\cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{88}$$

と成分表示できる．

4　角速度ベクトルと回転パラメータ

この章では回転行列の変分と時間微分について説明する．

4.1　回転行列の変分

回転行列の変分 $\delta\mathbf{R}$ について詳しく調べてみよう．

$$\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I} \tag{89}$$

$$\Leftrightarrow \quad \delta(\mathbf{R}^T\mathbf{R}) = \delta\mathbf{I} = 0 \tag{90}$$

$$\Leftrightarrow \quad \delta\mathbf{R}^T\mathbf{R} + \mathbf{R}^T\delta\mathbf{R} = 0 \tag{91}$$

$$\Leftrightarrow \quad \delta\mathbf{R}^T\mathbf{R} + (\delta\mathbf{R}^T\mathbf{R})^T = 0 \tag{92}$$

$$\Leftrightarrow \quad sym(\delta\mathbf{R}^T\mathbf{R}) = 0 \tag{93}$$

よって $\delta\mathbf{R}^T\mathbf{R}$ は対称成分が 0 なので，反対称行列であることが分かる．反対称行列であるので，適当なベクトル $\delta\boldsymbol{\Theta}$ とチルダの記号を用いて次のように表される．

$$\delta\Theta = vect(\delta\mathbf{R}^T\mathbf{R}) \ \Leftrightarrow \ \delta\tilde{\Theta} = \mathbf{R}^T\delta\mathbf{R} \ \Leftrightarrow \ \delta\mathbf{R} = \mathbf{R}\delta\tilde{\Theta} \tag{94}$$

回転行列は様々なパラメータ化の方法がありとても複雑であったが，その変分自体は単純にベクトルで表示できることが分かる．実は，回転行列の変分のベクトルの表示にはもう 1 種類ある．前と同じく単位行列の変分からスタートする．

$$
\begin{aligned}
& \mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I} && (95)\\
\Leftrightarrow\quad & \delta(\mathbf{R}\mathbf{R}^T) = \delta\mathbf{I} = 0 && (96)\\
\Leftrightarrow\quad & \delta\mathbf{R}\mathbf{R}^T + \mathbf{R}\delta\mathbf{R}^T = 0 && (97)\\
\Leftrightarrow\quad & \delta\mathbf{R}\mathbf{R}^T + (\delta\mathbf{R}\mathbf{R}^T)^T = 0 && (98)\\
\Leftrightarrow\quad & sym(\delta\mathbf{R}\mathbf{R}^T) = 0 && (99)
\end{aligned}
$$

よって $\delta\mathbf{R}\mathbf{R}^T$ は対称成分が 0 なので，反対称行列であることが分かる．反対称行列であるので，適当なベクトル $\delta\theta$ とチルダの記号を用いて次のように表される．

$$
\delta\theta = vect(\delta\mathbf{R}\mathbf{R}^T) \;\Leftrightarrow\; \delta\tilde{\theta} = \delta\mathbf{R}\mathbf{R}^T \;\Leftrightarrow\; \delta\mathbf{R} = \delta\tilde{\theta}\mathbf{R} \tag{100}
$$

二つのベクトル $\delta\theta, \delta\Theta$ によって回転行列の変分が次のようにベクトル表示されることが分かった．

回転行列の変分の二つのベクトル表示

$$
\begin{aligned}
\delta\mathbf{R} &= \mathbf{R}\delta\tilde{\Theta} && (101)\\
\delta\mathbf{R} &= \delta\tilde{\theta}\mathbf{R} && (102)
\end{aligned}
$$

$\mathbf{\Theta}$ と θ の意味はそれぞれ，ある回転の変化を，初期配置で $\mathbf{\Theta}$ だけ微小回転してから $\mathbf{R}$ だけ回転したと表現するか，$\mathbf{R}$ だけ回転させた現配置において θ だけ微小回転したと表現するかということに対応している．初期配置におけるベクトルを大文字で，現配置におけるベクトルを小文字で表示するのは慣例である．

$$
\begin{aligned}
\delta\tilde{\Theta} &= \mathbf{R}^T\delta\tilde{\theta}\mathbf{R} && (103)\\
\delta\tilde{\theta} &= \mathbf{R}\delta\tilde{\Theta}\mathbf{R}^T && (104)
\end{aligned}
$$

4.2 角速度ベクトル

ここで回転行列の微分 $\dot{\mathbf{R}}$ について調べてみよう．初期配置における，あるベクトル $\mathbf{X}$ が回転行列 $\mathbf{R}$ によって $\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{x}$ のように移動したとする．両辺のの時間微

分をとると $\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{x}$ となるから，回転行列の微分 $\dot{\mathbf{R}}$ は初期配置のあるベクトルが，現配置においてどのような速度を持っているかという関係を表すということが分かる．

さて，この回転行列の微分 $\dot{\mathbf{R}}$ であるが，前副章の回転行列の微分 $\delta\mathbf{R}$ と全く同じ議論によって，ベクトル表示することができる (δ を時間微分演算子だと考えれば良い)．とあるベクトル Ω, ω によって次のように回転行列の時間微分が表示される．

回転行列の時間微分の二つのベクトル表示

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\tilde{\Omega} \tag{105}$$

$$\dot{\mathbf{R}} = \tilde{\omega}\mathbf{R} \tag{106}$$

本ドキュメントでは Ω を初期配置における角速度ベクトル,ω を現配置における角速度ベクトルと呼ぶことにする．

5 初期配置における角速度 Ω と Cartesian Rotation Parameter Ψ の関係

本ドキュメントの始めで回転をパラメータ化するメリットの一つとして回転の補間が容易にできることを挙げた．例えば $\mathbf{R}(t+\Delta t) \simeq \mathbf{R} + \dot{\mathbf{R}}\Delta t$ とは近似できない．$\mathbf{R} + \dot{\mathbf{R}}\Delta t$ は一般的には回転行列とはならないからである (Δt の選び方によってはなる場合があるかもしれないが，Δt をどのように選んでも良いという分けではない)．しかしながら $\mathbf{\Psi}(t+\Delta t) \simeq \mathbf{\Psi} + \dot{\mathbf{\Psi}}\Delta t$ とパラメータの間に線形関係を近似することはできて，当然ながら，線形補間されたパラメータ $\mathbf{\Psi}(t+\Delta t)$ から補間された回転行列 $\mathbf{R}(t+\Delta t) = \mathbf{R}(\mathbf{\Psi}(t+\Delta t))$ を生成できる．

回転の補間をする時のパラメータとしては Cartesian Rotation Vector を一般的に使う．これは回転角とベクトルのノルムが線形関係になっているからである (例えば同じ回転軸上で２倍回転させたい場合は，Cartesian Rotation Vector を単純に２倍すれば良いが，他のパラメータではそうはいかない）．

運動方程式では物体の回転 $\mathbf{R}$ と角速度 $\mathbf{\Omega}$ と角速度の速度 $\dot{\mathbf{\Omega}}$ の関係が与えられるのに対して，数値的時間積分では Cartesian Rotation VectorΨ と，その速度 $\dot{\Psi}$ と，その加速度 $\ddot{\Psi}$ との関係が与えられる．本章では回転 $\mathbf{R}$ と角速度 $\mathbf{\Omega}$ と角速度の速度

$\dot{\mathbf{\Omega}}$ と，Cartesian Rotation Vector やその速度や加速度を関係付けることによって，運動方程式を数値積分することを可能にする

5.1 初期配置における角運動量 Ω の単位軸性ベクトル $\mathbf{n}$ と回転角 θ の速度による

この副章では，単位ベクトルの時間微分についての次の性質を利用する．

$$\begin{aligned} \frac{1}{dt}(\mathbf{n}^T\mathbf{n}) &= 2\mathbf{n}^T\dot{\mathbf{n}} && (107)\\ &= \frac{1}{dt}(\|\mathbf{n}\|^2) = \frac{1}{dt}(1) = 0 && (108)\\ &\Leftrightarrow \mathbf{n}^T\dot{\mathbf{n}} = 0 && (109) \end{aligned}$$

軸は回転に対して不変であるから，

$$\mathbf{R}\mathbf{n} = \mathbf{n} \tag{110}$$

となる．両辺を微分して，

$$\dot{\mathbf{R}}\mathbf{n} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{n}} = \dot{\mathbf{n}} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\mathbf{R}}\mathbf{n} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})\dot{\mathbf{n}} \tag{111}$$

両辺から $\mathbf{R}^T$ を掛けることによって，

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^T\dot{\mathbf{R}}\mathbf{n} = \mathbf{R}^T(\mathbf{I} - \mathbf{R})\dot{\mathbf{n}} \quad &\Leftrightarrow \quad \tilde{\Omega}\mathbf{n} = (\mathbf{R}^T - \mathbf{I})\dot{\mathbf{n}}\\ &\Leftrightarrow \quad \tilde{\mathbf{n}}\Omega = (\mathbf{I} - \mathbf{R}^T)\dot{\mathbf{n}} \end{aligned} \tag{112}$$

が成り立つ．

$$\mathrm{tr}(\dot{\mathbf{R}}) = \frac{1}{dt}(\mathrm{tr}\mathbf{R}) = \frac{1}{dt}(1 + 2\cos\theta) = -2\dot{\theta}\sin\theta \tag{113}$$

この量を別のやり方で表現してみよう．$\mathbf{R}$ を以下のように対称成分 $\mathbf{S}$ と非対称成分 $\tilde{\mathbf{a}}$ に分ける

$$\mathbf{R} = \mathbf{S} + \tilde{\mathbf{a}} \tag{114}$$

但し，$\mathbf{a} = \mathbf{n}\sin\theta$ である．ここで，$\mathbf{u}$ を任意のベクトルとして $\mathrm{tr}(\mathbf{R}\tilde{\mathbf{u}})$ を計算してみる．

$$\mathrm{tr}(\mathbf{S}\tilde{\mathbf{u}}) = S_{kl}\tilde{u}_{lk} = S_{kl}(-\tilde{u}_{kl}) = -S_{lk}\tilde{u}_{kl} = -\mathrm{tr}(\mathbf{S}\tilde{\mathbf{u}}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{tr}(\mathbf{S}\tilde{\mathbf{u}}) = 0 \tag{115}$$

$$\mathrm{tr}(\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{u}}) = \mathrm{tr}(\mathbf{a}\mathbf{u}^T - \mathbf{a}^T\mathbf{u}\mathbf{I}) = -2\mathbf{a}^T\mathbf{u} \tag{116}$$

よって，以下が成り立つ

$$\mathrm{tr}(\mathbf{R}\tilde{\mathbf{u}}) = -2\mathbf{a}^T\mathbf{u} = -2\sin\theta\mathbf{n}^T\mathbf{u} \tag{117}$$

$\mathbf{u}$ として，Ω を代入すると，

$$\mathrm{tr}(\mathbf{R}\tilde{\mathbf{\Omega}}) = -2\sin\theta\mathbf{n}^T\mathbf{\Omega} = \mathrm{tr}(\dot{\mathbf{R}}) \tag{118}$$

上式と見比べると，以下が成り立つことがわかる．

$$\dot{\theta} = \mathbf{n}^T\mathbf{\Omega} \tag{119}$$

以上から，

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{n}} \\ \mathbf{n}^T \end{bmatrix} \mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{R}^T)\dot{\mathbf{n}} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \tag{120}$$

が成り立つことが分かる．$\mathbf{n}$ と $\dot{\mathbf{n}}$ の直交性を利用して，

$$\Omega = -\tilde{\mathbf{n}}(\mathbf{I} - \mathbf{R})\dot{\mathbf{n}} + \mathbf{n}\dot{\theta} \tag{121}$$

が成り立つ．$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \sin\theta\tilde{\mathbf{n}} + (1 - \cos\theta)\tilde{\mathbf{n}}\tilde{\mathbf{n}}$ を代入して，

$$\Omega = \{sin\theta\mathbf{I} - (1 - \cos\theta)\tilde{\mathbf{n}}\}\dot{\mathbf{n}} + \mathbf{n}\dot{\theta} \tag{122}$$

が成り立つ．

5.2 接演算子 T を用いた初期配置における角速度 Ω と Cartesian Rotation Vector の速度 $\dot{\Psi}$ との関係

回転行列と Cartesian Rotation Vector Ψ は次のように関連付けられた．

$$\mathbf{R}(\Psi) = \exp(\tilde{\Psi}) = \mathbf{I} + \frac{1}{1!}\tilde{\Psi} + \frac{1}{2!}\tilde{\Psi}^2 + \frac{1}{3!}\tilde{\Psi}^3 \tag{123}$$

Cartesian Rotation Parameter の速度と初期配置における角速度を対応づけよう．

$$\dot{\Psi} = \frac{1}{dt}(\mathbf{n}\theta) = \dot{\mathbf{n}}\theta + \mathbf{n}\dot{\theta} \tag{124}$$

$\dot{\mathbf{n}}, \dot{\theta}$ を $\Psi, \dot{\Psi}$ を使って表現しよう．

$$\dot{\theta} = \mathbf{n}^T(\dot{\mathbf{n}}\theta + \mathbf{n}\dot{\theta}) = \frac{1}{|\mathbf{\Psi}|}\mathbf{\Psi}^T\dot{\Psi} \tag{125}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{n}} &= \frac{1}{\theta}\{(\dot{\mathbf{n}}\theta + \mathbf{n}\dot{\theta}) - \mathbf{n}\dot{\theta}\} && (126)\\
&= \frac{1}{|\mathbf{\Psi}|}\left\{\dot{\mathbf{\Psi}} - \frac{\mathbf{\Psi}}{|\mathbf{\Psi}|}\left(\frac{1}{|\mathbf{\Psi}|}\mathbf{\Psi}^T\dot{\Psi}\right)\right\} && (127)\\
&= \frac{1}{|\mathbf{\Psi}|}\left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{\Psi}}{|\mathbf{\Psi}|}\frac{\mathbf{\Psi}^T}{|\mathbf{\Psi}|}\right)\dot{\Psi} && (128)\\
&= -\frac{\tilde{\mathbf{\Psi}}\tilde{\mathbf{\Psi}}}{|\mathbf{\Psi}|^3}\dot{\Psi} && (129)
\end{aligned}$$

これらを代入すると，次のようになる．

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{sin\theta\mathbf{I} - (1-\cos\theta)\tilde{\mathbf{n}}\}\frac{-\tilde{\mathbf{\Psi}}\tilde{\mathbf{\Psi}}}{|\mathbf{\Psi}|^3}\dot{\Psi} + \mathbf{n}\frac{1}{|\mathbf{\Psi}|}\mathbf{\Psi}^T\dot{\Psi} && (130)\\
&= \left\{-\sin\theta\frac{\tilde{\mathbf{\Psi}}\tilde{\mathbf{\Psi}}}{|\mathbf{\Psi}|^3} + (\cos\theta - 1)\frac{\tilde{\mathbf{\Psi}}}{|\mathbf{\Psi}|^2} + \left(\frac{\tilde{\mathbf{\Psi}}\tilde{\mathbf{\Psi}}}{|\mathbf{\Psi}|^2} + \mathbf{I}\right)\right\}\dot{\Psi} && (131)\\
&= \left\{\mathbf{I} + \left(\frac{\cos|\mathbf{\Psi}| - 1}{|\mathbf{\Psi}|^2}\right)\tilde{\mathbf{\Psi}} + \left(1 - \frac{sin|\mathbf{\Psi}|}{|\mathbf{\Psi}|}\right)\frac{\tilde{\mathbf{\Psi}}\tilde{\mathbf{\Psi}}}{|\mathbf{\Psi}|^2}\right\}\dot{\Psi} && (132)\\
&= \mathbf{T}(\Psi)\dot{\Psi} && (133)
\end{aligned}$$

ここで，$\mathbf{T}$ は接作用素と呼ばれる．テイラー展開したものを求めよう．

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}(\Psi) &= \mathbf{I} + \left(\frac{\cos\theta - 1}{\theta^2}\right)\tilde{\mathbf{\Psi}} + \left(1 - \frac{\sin\theta}{\theta}\right)\frac{\tilde{\mathbf{\Psi}}\tilde{\mathbf{\Psi}}}{|\mathbf{\Psi}|^2} && (134)\\
&= \mathbf{I} + \left(-\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}\theta^2 - \frac{1}{6!}\theta^4\right)\tilde{\mathbf{\Psi}} + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{5!}\theta^2 + \frac{1}{7!}\theta^4\right)\tilde{\mathbf{\Psi}}\tilde{\mathbf{\Psi}} && (135)\\
&= \mathbf{I} - \frac{1}{2!}\tilde{\mathbf{\Psi}} + \frac{1}{3!}\tilde{\mathbf{\Psi}}^2 - \frac{1}{4!}\tilde{\mathbf{\Psi}}^3 + \frac{1}{5!}\tilde{\mathbf{\Psi}}^4 \cdots && (136)\\
&= \sum_n^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!}\tilde{\mathbf{\Psi}}^n && (137)
\end{aligned}$$

接演算子とそのテーラー展開

$$\begin{aligned}\mathbf{\Omega} &= \mathbf{T}(\mathbf{\Psi})\dot{\Psi} &(138)\\ \mathbf{T} &= \mathbf{I} - \frac{1}{2!}\tilde{\mathbf{\Psi}} + \frac{1}{3!}\tilde{\mathbf{\Psi}}^2 \cdots &(139)\end{aligned}$$

$\mathbf{\Omega}(\Psi)$ は $\Psi = 0$ において次のように $\dot{\Psi}$ と一致することが分かる

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{T}(0)\dot{\Psi} = \dot{\Psi} \tag{140}$$

さらに $\mathbf{\Omega}$ の変分を次のように計算する

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{\Omega} &= \delta\mathbf{T}\dot{\mathbf{\Psi}} + \mathbf{T}(0)\delta\dot{\Psi} &(141)\\ &= -\frac{1}{2}\delta\tilde{\mathbf{\Psi}}\dot{\mathbf{\Psi}} + \delta\dot{\mathbf{\Psi}} &(142)\\ &= \delta\dot{\mathbf{\Psi}} + \frac{1}{2}\tilde{\dot{\mathbf{\Psi}}}\delta\mathbf{\Psi} &(143)\\ &= \delta\dot{\mathbf{\Psi}} + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{\Omega}}\delta\mathbf{\Psi} &(144)\end{aligned}$$

よって $\mathbf{\Omega}$ の微分は次の通りになる

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{\Omega}}{\partial\dot{\mathbf{\Psi}}} &= \mathbf{T}(0) = \mathbf{I} &(145)\\ \frac{\partial\mathbf{\Omega}}{\partial\mathbf{\Psi}} &= \frac{1}{2}\tilde{\dot{\mathbf{\Psi}}} = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{\Omega}} &(146)\end{aligned}$$

5.3 角加速度のと Cartesian Rotation Vector の加速度の関係

さて，回転の増分を計算する際に, 回転の増分について Cartesian パラメータ Ψ を用いるとする．Cartesian パラメータと角速度は次のような関係があるのであった．

$$\dot{\Omega} = \frac{1}{dt}(\mathbf{T}(\mathbf{\Psi})\dot{\mathbf{\Psi}}) = \dot{\mathbf{T}}\dot{\mathbf{\Psi}} + \mathbf{T}\ddot{\mathbf{\Psi}} \tag{147}$$

但し，

$$\dot{\mathbf{T}} = -\frac{1}{2!}\tilde{\dot{\mathbf{\Psi}}} + \frac{1}{3!}\left(\tilde{\dot{\mathbf{\Psi}}}\tilde{\mathbf{\Psi}} + \tilde{\mathbf{\Psi}}\tilde{\dot{\mathbf{\Psi}}}\right)\cdots \tag{148}$$

これを用いて，角速度の変分と Cartesian パラメータの変分と対応づけよう．この Cartesian パラメータは増分計算のために用いるので，$\mathbf{\Psi} = 0$ における変分をとる. つまり，

$$\dot{\mathbf{\Omega}} = \dot{\mathbf{T}}(0)\dot{\mathbf{\Psi}} + \mathbf{T}(0)\ddot{\mathbf{\Psi}} = \ddot{\mathbf{\Psi}} \tag{149}$$

接作用素の時間微分の変分 $\delta\dot{\mathbf{T}}$ は次のように計算される

$$\delta\dot{\mathbf{T}}(0) = -\frac{1}{2}\delta\dot{\tilde{\mathbf{\Psi}}} + \frac{1}{3!}\left(\tilde{\mathbf{\Omega}}\delta\tilde{\mathbf{\Psi}} + \delta\tilde{\mathbf{\Psi}}\tilde{\mathbf{\Omega}}\right) \tag{150}$$

これを用いて角加速度の変分を計算してみよう.

$$\begin{aligned}
\delta\dot{\mathbf{\Omega}} &= \delta\dot{\mathbf{T}}(0)\dot{\mathbf{\Psi}} + \dot{\mathbf{T}}(0)\delta\dot{\mathbf{\Psi}} + \delta\mathbf{T}(0)\ddot{\mathbf{\Psi}} + \mathbf{T}(0)\delta\ddot{\mathbf{\Psi}} && (151)\\
&= \left\{-\frac{1}{2}\delta\dot{\tilde{\mathbf{\Psi}}} + \frac{1}{3!}\left(\tilde{\mathbf{\Omega}}\delta\tilde{\mathbf{\Psi}} + \delta\tilde{\mathbf{\Psi}}\tilde{\mathbf{\Omega}}\right)\right\}\mathbf{\Omega} - \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{\Omega}}\delta\dot{\mathbf{\Psi}} - \frac{1}{2}\delta\tilde{\mathbf{\Psi}}\dot{\mathbf{\Omega}} + \delta\ddot{\mathbf{\Psi}} && (152)\\
&= \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{\Omega}}\delta\dot{\mathbf{\Psi}} - \frac{1}{6}\tilde{\mathbf{\Omega}}\tilde{\mathbf{\Omega}}\delta\mathbf{\Psi} + \frac{1}{6}\delta\tilde{\mathbf{\Psi}}(\tilde{\mathbf{\Omega}}\mathbf{\Omega}) - \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{\Omega}}\delta\dot{\mathbf{\Psi}} + \frac{1}{2}\tilde{\dot{\mathbf{\Omega}}}\delta\mathbf{\Psi} + \delta\ddot{\mathbf{\Psi}} && (153)\\
&= \delta\ddot{\mathbf{\Psi}} + \left(\frac{1}{2}\tilde{\dot{\mathbf{\Omega}}} - \frac{1}{6}\tilde{\mathbf{\Omega}}\tilde{\mathbf{\Omega}}\right)\delta\mathbf{\Psi} && (154)
\end{aligned}$$

これを用いて角加速度の微分を計算してみよう.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\dot{\mathbf{\Omega}}}{\partial\mathbf{\Psi}} &= \frac{1}{2}\tilde{\dot{\mathbf{\Omega}}} - \frac{1}{6}\tilde{\mathbf{\Omega}}\tilde{\mathbf{\Omega}} && (155)\\
\frac{\partial\dot{\mathbf{\Omega}}}{\partial\dot{\mathbf{\Psi}}} &= 0 && (156)\\
\frac{\partial\dot{\mathbf{\Omega}}}{\partial\ddot{\mathbf{\Psi}}} &= \mathbf{I} && (157)\\
& && (158)
\end{aligned}$$

6 ハミルトン原理による剛体の運動方程式の導出

6.1 質量と重心

剛体の合計の質量 m は次のとおりである.

$$m = \int_v \rho dv \tag{159}$$

また重心 $\mathbf{x}_g$ はこれを用いて以下のように表される

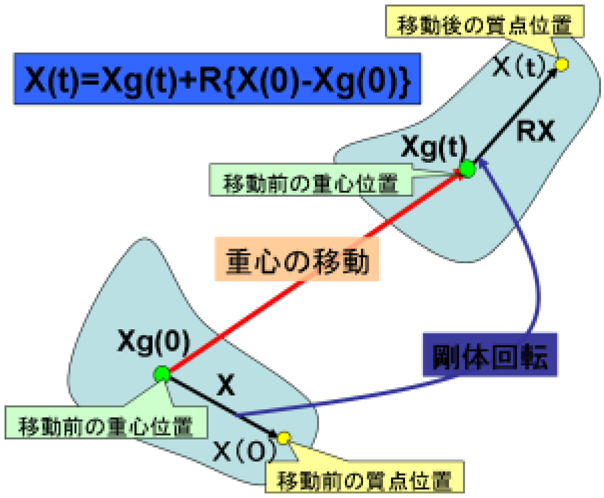

図 2: 剛体の移動と回転

$$\mathbf{x}_g = \frac{1}{m}\int_v \rho \mathbf{x} dv \tag{160}$$

ここで，剛体では以下の式が成り立つ．

剛体における物質点の位置

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_g(t) + \mathbf{R}(t)\{\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_g(0)\} \tag{161}$$

ここで次のように，微小体積に体積の変化はない．

$$dv = (\det \mathbf{R})\, dV = dV \tag{162}$$

であるから，質点における質量保存の法則より，

$$\rho(\mathbf{x}(t)) = \rho(\mathbf{x}(0)) \tag{163}$$

が成り立つ．つまりある物質点における密度に変化はない．当然ながら，剛体の質量も以下のように時間を通じて変化はない．

$$m = \int_v \rho(\mathbf{x}(t)) dv = \int_V \rho(\mathbf{x}(0)) dV \tag{164}$$

6.2　力学的エネルギー

剛体の力学的エネルギーは次のようになる．

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}\int_v \rho \dot{\mathbf{x}}^T \dot{\mathbf{x}} dv \tag{165}$$

簡単のために，次のように初期配置における重心との位置を $\mathbf{X}$ とおく．

$$\mathbf{X} = \mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_g(0) \tag{166}$$

すると剛体の質点の位置は次のように書くことができる．

$$x(t) = x_g(t) + \mathbf{R}(t)\mathbf{X} \tag{167}$$

両辺を時間微分すると次のとおり．

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_g + \dot{\mathbf{R}}\mathbf{X} \tag{168}$$

これを上式に代入すると以下のようになる．

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^T \dot{\mathbf{x}} &= (\dot{\mathbf{x}}_g + \dot{\mathbf{R}}\mathbf{X})^T (\dot{\mathbf{x}}_g + \dot{\mathbf{R}}\mathbf{X}) && (169) \\ &= \dot{\mathbf{x}}_g^T \dot{\mathbf{x}}_g + \mathbf{X}^T \dot{\mathbf{R}}^T \dot{\mathbf{x}}_g + \dot{\mathbf{x}}_g \dot{\mathbf{R}}\mathbf{X} + (\dot{\mathbf{R}}\mathbf{X})^T (\dot{\mathbf{R}}\mathbf{X}) && (170) \\ &= \dot{\mathbf{x}}_g^T \dot{\mathbf{x}}_g + 2\dot{\mathbf{x}}_g \dot{\mathbf{R}}\mathbf{X} + (\dot{\mathbf{R}}\mathbf{X})^T (\dot{\mathbf{R}}\mathbf{X}) && (171) \end{aligned}$$

これを用いると，

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \left(\frac{1}{2}\int_v \dot{\mathbf{x}}_g^T \dot{\mathbf{x}}_g dv\right) + \left(\frac{1}{2}\int_v 2\dot{\mathbf{x}}_g \dot{\mathbf{R}}\mathbf{X} dv\right) + \left(\frac{1}{2}\int_v (\dot{\mathbf{R}}\mathbf{X})^T (\dot{\mathbf{R}}\mathbf{X}) dv\right) && (172) \\ &= \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 + \mathcal{K}_3 && (173) \end{aligned}$$

のように書くことができる．以下それぞれの項について順番に計算を進める

第一項の計算

第一項について計算する．この項は重心の運動における力学エネルギーを表す．

$$\mathcal{K}_1 = \frac{1}{2}\int_v \rho \dot{\mathbf{x}}_g^T \dot{\mathbf{x}}_g dv = \left(\frac{1}{2}\int_v \rho dv\right) \dot{\mathbf{x}}_g^T \dot{\mathbf{x}}_g = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}_g^T \dot{\mathbf{x}}_g \tag{174}$$

第二項の計算

力学的エネルギーの第 2 項は次の通りになる．

$$\mathcal{K}_2 = \frac{1}{2}\int_v \rho 2\dot{\mathbf{x}}_g\dot{\mathbf{R}}\mathbf{X}dv = \dot{\mathbf{x}}_g\dot{\mathbf{R}}\int_V \rho\mathbf{X}dV \tag{175}$$

$$= \dot{\mathbf{x}}_g\dot{\mathbf{R}}\int_V \rho\left(\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_g(0)\right)dV \tag{176}$$

$$= \dot{\mathbf{x}}_g\dot{\mathbf{R}}\int_V \rho\{m\left(\frac{1}{m}\int_V \rho\mathbf{x}(0)dV\right) - \mathbf{x}_g(0)\int_V \rho dV\} \tag{177}$$

$$= \dot{\mathbf{x}}_g\dot{\mathbf{R}}\{m\mathbf{x}_g(0) - m\mathbf{x}_g(0)\} \tag{178}$$

$$= 0 \tag{179}$$

この項は無視できることがわかる．第二項が消えるのは剛体の変形を表すのに，重心を基点として並進と回転を表したおかげである．

第三項の計算

力学的エネルギーの第 3 項は次のとおりであった．

$$\mathcal{K}_3 = \frac{1}{2}\int_V \rho(\dot{\mathbf{R}}\mathbf{X})^T(\dot{\mathbf{R}}\mathbf{X})dV \tag{180}$$

ここで回転行列の微分について以下のように式変形できる．

$$\dot{\mathbf{R}}\mathbf{X} = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{\Omega}}\mathbf{X} = -\mathbf{R}\tilde{\mathbf{X}}\mathbf{\Omega} \tag{181}$$

これを上式に代入すると，

$$(\dot{\mathbf{R}}\mathbf{X})^T(\dot{\mathbf{R}}\mathbf{X}) = (-\Omega^T\tilde{\mathbf{X}}^T\mathbf{R}^T)(-\mathbf{R}\tilde{\mathbf{X}}\mathbf{\Omega}) \tag{182}$$

$$= \Omega^T\tilde{\mathbf{X}}^T\tilde{\mathbf{X}}\mathbf{\Omega} \tag{183}$$

ここで，次で定義される慣性モーメント $\mathbf{J}$

慣性モーメント

$$\mathbf{J} = \int_V \rho\tilde{\mathbf{X}}^T\tilde{\mathbf{X}}dV = \int_V \rho(||\mathbf{X}||^2\mathbf{I} - \mathbf{X}\mathbf{X}^T)dV \tag{184}$$

を上式に代入すると，

$$\mathcal{K}_3 = \frac{1}{2}\int_V \rho \Omega^T \tilde{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{\Omega} dV = \frac{1}{2}\Omega^T \{\int_V \rho \tilde{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{X}} dV\} \mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}\Omega^T \mathbf{J}\mathbf{\Omega} \tag{185}$$

これらを総合すると，剛体の力学的エネルギー $\mathcal{K}$ は次のとおり，

力学的エネルギー

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}(m\dot{\mathbf{x}}_g^T \dot{\mathbf{x}}_g + \Omega^T \mathbf{J}\mathbf{\Omega}) \tag{186}$$

6.3　ポテンシャルエネルギー

ポテンシャルエネルギーとして，体積力によるエネルギーと，表面力によるエネルギーが考えられる．体積力の例としては重力や電磁気力，表面力の例としては圧力が挙げられる．ここでは体積力，特に一定の重力 $\mathbf{g}$ によるポテンシャルエネルギーを考える．

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= -\int_v \rho\,(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(0))^T\,\mathbf{g}dv & (187) \\ &= -(\mathbf{x}_g(t) - \mathbf{x}_g(0))^T m\mathbf{g} & (188) \end{aligned}$$

よって，ポテンシャルエネルギーは重心の変位によって表される．また，変分については以下のようになる．

$$\delta\mathcal{V} = -\delta\mathbf{x}_g^T(t) m\mathbf{g} \tag{189}$$

6.4　ハミルトン原理を用いた運動方程式の導出

ハミルトン原理を使って運動方程式を導出する．ハミルトン原理を用いると方程式に任意の変数を選ぶことができるので，剛体のような回転も含む運動も簡単に記述することができる．運動に拘束条件 $\Phi = 0$ が課されているとする．Φ は剛体の並進と回転の自由度に関して，1 回微分可能であるとする．ラグラジアン $\mathcal{L}$ は次のように定義される．ここで，λ はラグランジュ未定乗数である．

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{V} - \lambda^T \Phi \tag{190}$$

次のような作用と呼ばれる量 $\mathcal{I}$ を定義する．

$$\mathcal{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \tag{191}$$

ラグランジュ原理は時刻 t_1 から t_2 までの運動は t_1, t_2 における変分が 0 な上で，この作用が極値となる．つまり，

$$\delta\mathcal{I} = 0 \tag{192}$$

が成り立つ．実際にこの作用を剛体について計算することで，剛体の運動方程式を導出してみよう．

6.4.1　力学的エネルギーの変分

力学的エネルギーの変分は以下のようになる

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{K} &= \delta\dot{\mathbf{x}}_g^T m\dot{\mathbf{x}}_g + \delta\Omega^T \mathbf{J}\Omega & (193)\\
&= \delta\dot{\mathbf{x}}_g^T m\dot{\mathbf{x}}_g + (\delta\dot{\Theta} + \tilde{\Omega}\delta\Theta)^T \mathbf{J}\Omega & (194)\\
&= \frac{d}{dt}\{\delta\mathbf{x}_g^T m\mathbf{x}_g\} - \delta\mathbf{x}_g^T m\ddot{\mathbf{x}}_g + \frac{d}{dt}\{\delta\Theta^T \mathbf{J}\Omega\} - \delta\Theta^T \mathbf{J}\dot{\Omega} + \delta\Theta^T \tilde{\Omega}^T \mathbf{J}\boldsymbol{\Omega} & (195)\\
&= \frac{d}{dt}\{\delta\mathbf{x}_g^T m\mathbf{x}_g + \delta\Theta^T \mathbf{J}\Omega\} - \delta\mathbf{x}_g^T m\ddot{\mathbf{x}}_g - \delta\Theta^T (\mathbf{J}\dot{\Omega} + \tilde{\Omega}\mathbf{J}\Omega) & (196)
\end{aligned}$$

さて，これで変分は次のようになる．

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \delta\mathcal{K} dt &= \left[\delta\mathbf{x}_g^T m\mathbf{x}_g + \delta\Theta^T \mathbf{J}\Omega\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta\mathbf{x}_g^T m\ddot{\mathbf{x}}_g + \delta\Theta^T (\mathbf{J}\dot{\Omega} + \tilde{\Omega}\mathbf{J}\Omega)\right] dt & (197)\\
&= -\int_{t_1}^{t_2} \delta\mathbf{x}_g^T m\ddot{\mathbf{x}}_g + \delta\Theta^T (\mathbf{J}\dot{\Omega} + \tilde{\Omega}\mathbf{J}\Omega) dt & (198)
\end{aligned}$$

但し時刻 t_1, t_2 で $\delta\mathbf{x}_g = 0\delta\boldsymbol{\Theta} = 0$ とすることを用いた．

6.4.2　制約条件の変分

剛体の運動は重心の位置 $\mathbf{x}_g$ と回転 $\mathbf{R}$ で表される．これについて制約が課されているとして，この変分を計算しよう．

$$\lambda^T \Phi = \delta\lambda^T \Phi + \lambda^T \delta\Phi \tag{199}$$

さて上式の右辺第二項の $\delta\Phi$ を詳しく見てみると，

$$
\begin{aligned}
\delta\Phi &= \Phi(\delta\mathbf{x}_g, \mathbf{R}) + \Phi(\mathbf{x}_g, \delta\mathbf{R}) && (200)\\
&= \Phi(\delta\mathbf{x}_g, \mathbf{R}) + \Phi(\mathbf{x}_g, \mathbf{R}\delta\tilde{\Theta}) && (201)\\
&= \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{x}_g}\delta\mathbf{x}_g + \frac{\partial\Phi}{\partial\Theta}\delta\Theta && (202)
\end{aligned}
$$

6.5 作用の変分による運動方程式の導出

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{I} &= \delta\int_{t_1}^{t_2}\mathcal{L}dt && (203)\\
&= \delta\int_{t_1}^{t_2}\mathcal{K}-\mathcal{P}-\lambda^T\Phi dt && (204)\\
&= -\int_{t_1}^{t_2}\delta\mathbf{x}_g^T m\ddot{\mathbf{x}}_g + \delta\Theta^T(\mathbf{J}\dot{\Omega}+\tilde{\Omega}\mathbf{J}\Omega)dt + \int_{t_1}^{t_2}\delta\mathbf{x}_g^T m\mathbf{g}dt && (205)\\
&\quad -\int_{t_1}^{t_2}\delta\lambda^T\Phi + \lambda^T\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{x}_g}\delta\mathbf{x}_g + \frac{\partial\Phi}{\partial\Theta}\delta\Theta\right\}dt && (206)\\
&= \int_{t_1}^{t_2}\delta\mathbf{x}_g^T\left\{-m\ddot{\mathbf{x}}_g + m\mathbf{g} - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{x}_g}\right)^T\lambda\right\}dt && (207)\\
&\quad -\int_{t_1}^{t_2}\delta\Theta_g^T\left\{\mathbf{J}\dot{\Omega}+\tilde{\Omega}\mathbf{J}\Omega + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\Theta}\right)^T\lambda\right\}dt - \int_{t_1}^{t_2}\delta\lambda^T\Phi dt && (208)
\end{aligned}
$$

これが全ての $\delta\mathbf{x}_g$，$\delta\boldsymbol{\Theta}$，$\delta\lambda$ について成り立つから，

$$
\left\{
\begin{aligned}
m\ddot{\mathbf{x}}_g + \left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{x}_g}\right)^T\lambda &= m\mathbf{g}\\
\mathbf{J}\dot{\Omega}+\tilde{\Omega}\mathbf{J}\Omega + \left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial\Theta}\right)^T\lambda &= 0\\
\Phi &= 0
\end{aligned}
\right. \qquad (209)
$$

が成り立つ．

7 運動方程式の Cartesian Rotation Vector を用いた増分解法

次のように慣性力による内力 $\mathbf{q}$ を置く．

$$
\mathbf{q} = \left\{ \begin{array}{c} q^u \\ q^\theta \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} m\ddot{\mathbf{x}}_g \\ \mathbf{J}\dot{\Omega} + \tilde{\Omega}\mathbf{J}\Omega \end{array} \right\} \tag{210}
$$

さて，この内力の変分を求めてみよう．変分は並進と Ω の速度，加速度で取るとする．

$$
\delta\mathbf{q}^u = m\mathbf{I}\delta\ddot{\mathbf{x}}_g \tag{211}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta\mathbf{q}^\theta &= \delta\{\mathbf{J}\dot{\Omega} + \tilde{\Omega}\mathbf{J}\Omega\} && (212)\\
&= \mathbf{J}\delta\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \delta\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{J}\boldsymbol{\Omega} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{J}\delta\boldsymbol{\Omega} && (213)\\
&= \mathbf{J}\delta\dot{\boldsymbol{\Omega}} - \mathbf{J}\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\delta\boldsymbol{\Omega} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{J}\delta\boldsymbol{\Omega} && (214)\\
&= \mathbf{J}\delta\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \left(\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{J} - \mathbf{J}\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\right)\delta\boldsymbol{\Omega} && (215)
\end{aligned}
$$

7.1 Cartesian Rotation Vector を使った内力の増分

上の式を用いると次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\delta\mathbf{q}^\theta &= \mathbf{J}\delta\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \left(\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{J} - \mathbf{J}\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\right)\delta\boldsymbol{\Omega} \\
&= \mathbf{J}\delta\ddot{\boldsymbol{\Psi}} + \left(\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{J} - \mathbf{J}\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\right)\delta\dot{\boldsymbol{\Psi}} + \left(\frac{1}{2}\mathbf{J}\tilde{\dot{\boldsymbol{\Omega}}} - \frac{1}{6}\mathbf{J}\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\tilde{\boldsymbol{\Omega}} + \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{J}\tilde{\boldsymbol{\Omega}} - \frac{1}{2}\mathbf{J}\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\right)\delta\boldsymbol{\Psi}
\end{aligned} \tag{216}
$$

よって，次が成り立つ

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
\frac{\partial\delta\mathbf{q}^\theta}{\partial\ddot{\boldsymbol{\Psi}}} &=& \mathbf{J} \\
\frac{\partial\delta\mathbf{q}^\theta}{\partial\dot{\boldsymbol{\Psi}}} &=& \tilde{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{J} - \mathbf{J}\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \\
\frac{\partial\delta\mathbf{q}^\theta}{\partial\boldsymbol{\Psi}} &=& \frac{1}{2}\left(\mathbf{J}\tilde{\dot{\boldsymbol{\Omega}}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{J}\tilde{\boldsymbol{\Omega}} - \mathbf{J}\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\right) - \frac{1}{6}\mathbf{J}\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\tilde{\boldsymbol{\Omega}}
\end{array}
\right. \tag{217}
$$

次のように剛体の自由度 $\mathbf{p}$ を定める

$$
\mathbf{p} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{x}_g \\ \boldsymbol{\Psi} \end{array} \right\} \tag{218}
$$

また，次のように行列 $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$ を定める．

$$\mathbf{M}^{in} = \left\{ \begin{array}{cc} m\mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{J} \end{array} \right\} \tag{219}$$

$$\mathbf{C}^{in} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{\Omega}}\mathbf{J} - \mathbf{J}\tilde{\mathbf{\Omega}} \end{array} \right\} \tag{220}$$

$$\mathbf{K}^{in} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\left(\mathbf{J}\tilde{\dot{\mathbf{\Omega}}} + \tilde{\mathbf{\Omega}}\mathbf{J}\tilde{\mathbf{\Omega}} - \mathbf{J}\tilde{\mathbf{\Omega}}\tilde{\mathbf{\Omega}}\right) - \frac{1}{6}\mathbf{J}\tilde{\mathbf{\Omega}}\tilde{\mathbf{\Omega}} \end{array} \right\} \tag{221}$$

すると次のようにおける．

$$\delta\mathbf{q} = \mathbf{M}^{in}\delta\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{C}^{in}\delta\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}^{in}\delta\mathbf{p} \tag{222}$$

7.2　拘束の増分

拘束の増分について求める．ここで３×３の行列 $\mathbf{B}^u, \mathbf{B}^\theta$ を次のようにおく．

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{B}^u & = \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{x}_g} \\ \mathbf{B}^\theta & = \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \end{array} \right. \tag{223}$$

ここで，次のように拘束条件の 2 回微分をおく

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{K}^{uu} & = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\mathbf{x}_g\partial\mathbf{x}_g} \\ \mathbf{K}^{u\Theta} & = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\mathbf{x}_g\partial\mathbf{\Theta}} \\ \mathbf{K}^{\Theta\Theta} & = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\mathbf{\Theta}\partial\mathbf{\Theta}} \end{array} \right. \tag{224}$$

但し，簡単のために次のように λ について係数が取られているとする．

$$\mathbf{K}^{uu}\lambda = \frac{\partial^2\Phi^k}{\partial\mathbf{x}_g\partial\mathbf{x}_g}\lambda_k \tag{225}$$

これを使って拘束力の増分について計算してみよう．

$$\delta\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{x}_g}\right)^T\lambda\right\} = \mathbf{K}^{uu}\lambda\delta\mathbf{x}_g + \mathbf{K}^{u\Theta}\lambda\delta\Theta + \mathbf{B}^{uT}\delta\lambda \tag{226}$$

$$\delta\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\Theta}\right)^T\lambda\right\} = \mathbf{K}^{\Theta u}\lambda\delta\mathbf{x}_g + \mathbf{K}^{\Theta\Theta}\lambda\delta\Theta + \mathbf{B}^{\Theta^T}\delta\lambda \tag{227}$$

拘束条件の増分は次のとおり.

$$\delta\Phi = \mathbf{B}^u\mathbf{x}_g + \mathbf{B}^\theta\delta\Theta \tag{228}$$

7.3　運動方程式の増分

次のように拘束力も含む全体の自由度 $\mathbf{P}$ を定める

$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_g \\ \mathbf{\Psi} \\ \lambda \end{Bmatrix} \tag{229}$$

また，次のように行列 $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$ を定める.

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} m\mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{J} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \tag{230}$$

$$\mathbf{C} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{\Omega}}\mathbf{J} - \mathbf{J}\tilde{\mathbf{\Omega}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \tag{231}$$

$$\mathbf{K} \;=\; \begin{Bmatrix} \mathbf{K}^{uu} & \mathbf{K}^{u\Theta} & \mathbf{B}^{u^T} \\ \mathbf{K}^{\Theta u} & \frac{1}{2}\left(\mathbf{J}\tilde{\dot{\mathbf{\Omega}}} + \tilde{\mathbf{\Omega}}\mathbf{J}\tilde{\mathbf{\Omega}} - \mathbf{J}\tilde{\mathbf{\Omega}}\tilde{\mathbf{\Omega}}\right) - \frac{1}{6}\mathbf{J}\tilde{\mathbf{\Omega}}\tilde{\mathbf{\Omega}} \;+\; \mathbf{K}^{\Theta\Theta} & \mathbf{B}^{\Theta^T} \\ \mathbf{B}^u & \mathbf{B}^\Theta & 0 \end{Bmatrix} \tag{232}$$

系全体の内力 $\mathbf{Q}$ についても以下のように定める

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} m\ddot{\mathbf{x}}_g + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{x}_g}\right)^T\lambda \\ \mathbf{J}\dot{\Omega} + \tilde{\Omega}\mathbf{J}\Omega + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\Theta}\right)^T\lambda \\ \Phi \end{Bmatrix} \tag{233}$$

次のように内力の増分が計算できる

$$\delta\mathbf{Q} = \mathbf{M}\delta\ddot{\mathbf{P}} + \mathbf{C}\delta\dot{\mathbf{P}} + \mathbf{K}\delta\mathbf{P} \tag{234}$$

また外力 **F** を次のようにおくと

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} m\mathbf{g} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{235}$$

ここで,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{F} \tag{236}$$

を満たすように時間積分関係式を組み込んだ Newton-Raphson 法増分をとけば,解を求めることができる.

8　参考にしたもの

[1],[2],[3],[4],[5],[6]
[7],[8]

参考文献

[1] Géradin, M. and Cardona, A.: *Flexible Multibody Dynamics: A Finite Element Approach*, Wiley, 0003 edition (2001).

[2] Crisfield, M. A.: *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Advanced Topics (Non-Linear Finite Element Analysis Solids & Structure)*, Wiley, volume 2 edition (1997).

[3] 日本機械学会（編）: マルチボディダイナミクス (2)-数値解析と実際- (コンピュータダイナミクスシリーズ), コロナ社 (2007).

[4] 日本機械学会（編）: マルチボディダイナミクス〈1〉基礎理論 (コンピュータダイナミクスシリーズ), コロナ社 (2006).

[5] 田島洋：マルチボディダイナミクスの基礎 - 3 次元運動方程式の立て方, 東京電機大学出版局 (2006).

[6] McCauley, J. L.: *Classical Mechanics: Transformations, Flows, Integrable and Chaotic Dynamics*, Cambridge University Press (1997).

[7] EMAN の物理学：解析力学, `http://homepage2.nifty.com/eman/analytic/contents.html`.

[8] 物理のかぎしっぽ：解析力学, `http://www12.plala.or.jp/ksp/analytic/index.html`.