Bessel Function*

梅谷　信行

平成 22 年 7 月 20 日

目 次

1　概要　2

2　確定特異点まわりの級数解（フロベニウスの方法）　2

3　ベッセルの微分方程式の級数解　3

4　第１種ベッセル関数　4
　　4.0.1　Gnuplot によるグラフの出力 5

5　第２種ベッセル関数　6
　5.1　ν が整数でない時 6
　5.2　ν が整数である場合 6
　　5.2.1　gnuplot による描画 7
　　5.2.2　整数の場合は $J_-\nu$ が使えない 7

6　Hankel 関数　8
　6.1　Helmholtz 方程式の解 8

7　参考にしたもの　9

*これは忘れっぽい著者が昔勉強したことを書き留めておく備忘録です．きっと間違えを多く含んでいます．すいません．ご指摘ご意見などありましたら教えてもらえると有り難いです．

1　概要

軸対称問題で偏微分方程式を解く際に良く出てくる次のベッセル関数 (Bessel function) について簡単にまとめる．

ベッセルの微分方程式

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{1}$$

2　確定特異点まわりの級数解（フロベニウスの方法）

微分方程式が次のような形で表されているとする．

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{2}$$

方程式の係数 $P(x)$，$Q(x)$ のうち，どちらかが $x = 0$ で極を持つとする．このとき，$xP(x)$ と $x^2Q(x)$ が実解析的，つまり次のようにテーラー展開可能であれば，

$$\begin{cases} xP(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k \\ x^2Q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k \end{cases} \tag{3}$$

a は**確定特異点**であるといい，解に対して次のような級数展開が可能である．

$$y = x^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{4}$$

これを，微分方程式に代入することによって，a_n を求める．上の式に代入すると，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\{(n+\lambda)(n+\lambda-1) + (n+\lambda)\sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k\}x^{n+\lambda} = 0 \tag{5}$$

これを纏めて，次のように書くとする．

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+\lambda} = 0 \tag{6}$$

右辺が 0 であるから当然 A_n は全ての n に対して 0 である．つまり，

$$A_0 = a_0\{\lambda(\lambda-1) + \lambda p_0 + q_0\} = 0 \tag{7}$$

$$A_1 = a_1\{(\lambda+1)\lambda + (\lambda+1)p_0 + q_0\} + a_0\{\lambda p_1 + q_1\} = 0 \tag{8}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdot$$

$$A_n = a_n(n+\lambda)(n+\lambda-1) + \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\{(n-k+\lambda)p_k + q_k\} = 0 \tag{9}$$

ここで，A_0 に関する方程式で $a_0 \neq 0$ であるから，次の**決定方程式**と呼ばれる方程式が成り立つ．

決定方程式

$$\lambda(\lambda-1) + \lambda p_0 + q_0 = 0 \tag{10}$$

この決定方程式を解くことで，λ を求め，$A_n = 0\ (n \geq 2)$ から得られる漸化式を解くことで，a_n が求まる．このように解ける偏微分方程式として，次で説明するベッセルの微分方程式と，ルジャンドルの微分方程式がある．

3 ベッセルの微分方程式の級数解

ベッセルの微分方程式は次のとおりであった．

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{11}$$

x^2 で両辺を割ると

$$y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{\nu^2}{x^2})y = 0 \tag{12}$$

となる．$\frac{1}{x}$ は $x = 0$ で極を持っているために，$x = 0$ はこの方程式の確定特異点である．$y = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda}$ (2) と置いたとき，$a_0 = 0$ が成り立つ．実際に式 (2) を式 (1) 代入に代入することで，a_n を決定することができる．式 (1) のそれぞれの項は以下のようになる．

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\lambda)x^{n+\lambda-1} \Rightarrow xy' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\lambda)x^{n+\lambda} \tag{13}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\lambda)(n+\lambda-1)x^{n+\lambda-2} \Rightarrow x^2y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\lambda)(n+\lambda-1)x^{n+\lambda} \tag{14}$$

$$x^2 y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\lambda+n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{\lambda+n} \tag{15}$$

実際にこれらを (1) の右辺にに代入すると，

$$\begin{aligned} L(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\{(n+\lambda)(n+\lambda-1)+(n+\lambda)-\nu^2\}x^{n+\lambda} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{\lambda+n} && (16) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\{(n+\lambda)^2-\nu^2\}x^{n+\lambda} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{\lambda+n} && (17) \end{aligned}$$

- $n = 0$ のとき，a_0 の係数が 0 になること（決定方程式）から，$\lambda^2 - \nu^2 = 0$ が成り立つ．よって，$\lambda = \mp\nu$ となる．ここで，$Re(\nu) \geq 0$ であるとして，$\lambda_1 = \nu$,　$\lambda_2 = -\nu$ とおく．
- $n = 1$ に対しては，$a_1\{(\lambda+1)^2 - \nu^2\} = 0$ が成り立つ．$n = 0$ で $\lambda = \mp\nu$ であったので，$a_1 = 0$ である．
- $n \geq 2$ に対しては，$a_n\{(\lambda+n)^2 - \nu^2\} + a_{n-2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{-a_{n-2}}{n(2\nu+n)}$ が成り立つ．

4　第 1 種ベッセル関数

$\lambda_1 = \nu$ に対する解 y_1 を求めよう．決定方程式と漸化式から次が成り立った．

$$a_1 = 0, \quad a_n = \frac{-a_{n-2}}{n(2\nu+n)} \tag{18}$$

この漸化式を解いてみよう．

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{-a_{2(k-1)}}{2k(2\nu+2k)} = \left(\frac{-1}{4k(\nu+k)}\right) a_{2(k-1)} && (19) \\ &= \left(\frac{-1}{4k(\nu+k)}\right)\left(\frac{-1}{4(k-1)(\nu+k-1)}\right) a_{2(k-2)} && (20) \\ &= \left(\frac{(-1)^k}{4^k k!(\nu+k)(\nu+k-1)\cdots(\nu+1)}\right) a_0 && (21) \end{aligned}$$

$$a_{2k-1} = 0 \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= x^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}x^{2k} && (23)\\
&= a_0 x^{\nu}\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4^k k!(\nu+k)\cdots(\nu+1)}x^{2k}\right\} && (24)\\
&= a_0 x^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4^k k!(\nu+k)\cdots(\nu+1)}x^{2k} && (25)
\end{aligned}$$

ガンマ関数 $\Gamma(x)$ を用いて上の式を変形する．ガンマ関数は $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \Gamma(1) = 1$ を満たす．これを用いると，

$$(\nu+k)(\nu+k-1)\cdots(\nu+1) = \Gamma(\nu+k+1)/\Gamma(\nu+1) \tag{26}$$

となる．これを上に代入して，

$$\begin{aligned}
y_1 &= a_0 x^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k}k!\Gamma(\nu+k+1)/\Gamma(\nu+1)}x^{2k} && (27)\\
&= a_0 x^{\nu}\Gamma(\nu+1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!\Gamma(\nu+k+1)} && (28)
\end{aligned}$$

ここで，$a_0 = \frac{1}{2^{\nu}}\Gamma(\nu+1)$ のように選ぶと，右辺は ν 次の第一ベッセル関数を与える．

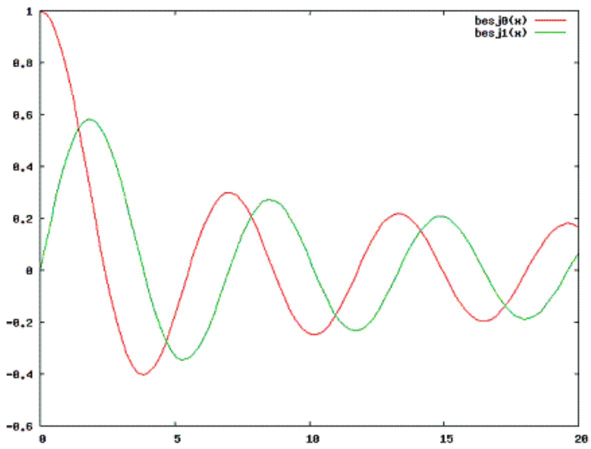
第一ベッセル関数

$$J_{\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \tag{29}$$

4.0.1 Gnuplot によるグラフの出力

Gnuplot を使えば，$J_0(x)$ と $J_1(x)$ は次のようなコマンドによって描画できる．

```
> set xrange [0:20]
> plot besj0(x), besj1(x)
```



5　第２種ベッセル関数

5.1　ν が整数でない時

ν が整数でない時に，$\lambda = -\nu$ に対応する解を見つけてみよう．ν が整数でないときは，ν の代わりに $-\nu$ を代入すればよく，結局

$$J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!\Gamma(-\nu+k+1)} \tag{30}$$

も解となる．よってこの場合の一般解は

$$y = AJ_\nu(x) + BJ_{-\nu}(x) \tag{31}$$

となる．$J_{-\nu}$ の代わりに，J_ν と $J_{-\nu}$ で定義される，次のようなノイマン関数 $N_\nu(x)$ が使われることもある．

ノイマン関数

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{sin\nu\pi} \tag{32}$$

5.2　ν が整数である場合

この場合はノイマン関数の極限として，定義される．

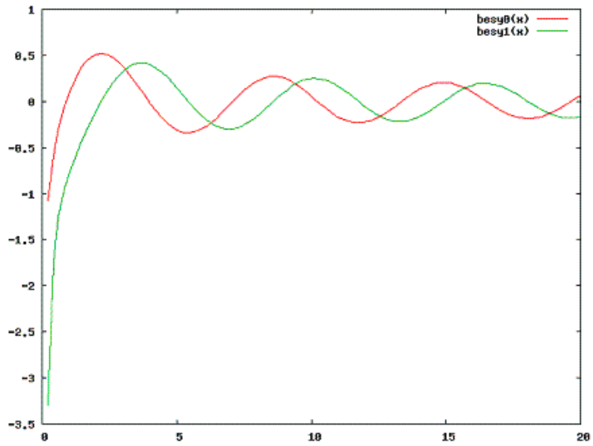
ν が整数であるときのノイマン関数

$$N_n = \lim_{\alpha \to n} N_\alpha \tag{33}$$

5.2.1 gnuplot による描画

gnuplot では次のようなコマンドを使うことによって，画像を得ることができる．

```
> set xrange [0:20]
> plot besy0(x), besy1(x)
```



5.2.2 整数の場合は $J_-\nu$ が使えない

ν が整数である場合は，$J_{-\nu}$ は使えない．次に示すように J_ν と $J_{-\nu}$ は独立にならず，λ_2 の解として別のものが必要となるからである．$\Gamma(-\nu+k+1)$ が $k=0,1,\ldots,\nu-1$ に関して ∞ となる．よって，$k \geq \nu$ についてのみ和を計算する．

$$J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k=\nu}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!\Gamma(-\nu+k+1)} \tag{34}$$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+\nu} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(k+\nu)}}{(k+\nu)!\Gamma(-\nu+k+\nu+1)} \tag{35}$$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(-1)^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu}}{(k+\nu)!\Gamma(k+1)} \tag{36}$$

$$= (-1)^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(k+\nu+1)k!} \tag{37}$$

$$= (-1)^\nu J_\nu(x) \tag{38}$$

よって，

$$J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x) \tag{39}$$

となるので，独立ではなく，線形従属になってしまう．

ν が整数なときに $J_{-\nu}$ について成り立つ関係式

$$J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x) \tag{40}$$

6 Hankel 関数

次の関数も Bessel の微分方程式を満足する

第一種 Hankel 関数

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x) \tag{41}$$

第二種 Hankel 関数

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iY_\nu(x) \tag{42}$$

この線形結合で解は与えられる．

6.1 Helmholtz 方程式の解

２次元無限領域における次の Helmholtz 方程式の解はこの Hankel 関数を使って与えられる．

$$\nabla^2 g(|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|) + k^2 g(|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|) = \delta(|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|) \tag{43}$$

$$g(|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|) = \frac{iH_0^{(1)}(k(|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|)}{4} \tag{44}$$

7 参考にしたもの

[1],[2],[3],[4]

参考文献

[1] フジエダ電子出版:ベッセル関数, `http://www.f-denshi.com/000TokiwaJPN/14bibnh/441bes.html`.

[2] フジエダ電子出版：確定特異点周りでの級数解, `http://www.f-denshi.com/000TokiwaJPN/14bibnh/109deq.html`.

[3] Wikipedia, : Bessel Function, `http://en.wikipedia.org/wiki/Bessel_function`.

[4] 田辺行人, 藤原毅夫：常微分方程式 （東京大学基礎工学双書）, 東京大学出版会 (1981).