

サンブナン体の有限要素法による解法*

梅谷 信行

平成22年7月7日

目次

1 Introduction	1
2 Constitution Tensor	2
2.1 曲座標表示	3
3 Implementation	3
3.1 第二 Piola-Kirchhoff 応力を作るルーティン	3
3.2 初期剛性行列を作るルーティン	4
4 解析例	5

1 Introduction

[1],[2] を参考にして解説する.

サンブナン体 (St.Venant-Kirchhoff material, StVK material) とは第二 Piola-Kirchhoff 応力 (second Piola-Kirchhoff stress) と Green-Lagrange 歪 (Green-Lagrange strain) の関係が線形である構成式を持つ等方な物体である。サンブナン体の構成式は幾何学的非線形性を考慮した中でもっとも単純な構成式を持つ。幾何学的非線形性を考慮しているので大変形 (つまり回転) しても線形弾性体のように膨張する不自然な解を得ない。どのような材料の非線形性をを持った物体でも歪が微小な場合は

*これは忘れっぽい著者が昔勉強したことを書き留めておく備忘録です。きっと間違いを多く含んでいます。すいません。ご指摘ご意見などありましたら教えてもらえると有り難いです。

応力-歪関係が線形であり、応力-歪関係が線形であるサンブナン体は歪が小さい時に実際の物質とよく一致する。つまり、**大変形微小歪問題はサンブナン体を良く使う**

2 Constitution Tensor

応力-歪関係が第二 Piola-Kirchhoff 応力と Green-Lagrange 歪で記述されているため、一般的に Total Lagrange 法で解析を行う。このときに物質固有の値として必要なのは Green-Lagrange 歪と第二 Piola-Kirchhoff 応力を対応づける構成式と、歪と応力の微小変化を対応づける構成則テンソル (Constitution Tensor) である。

サンブナン体の構成式は Lamé の弾性定数 (Lamé's elastic constants, Lamé parameters) を用いて以下のように書くことができる。

$$\mathbf{S} = \lambda(\text{tr}\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} \quad (1)$$

これを、直交座標系で成分表示すると次のとおり、

$$S_{ij} = \lambda E_{kk}\delta_{ij} + 2\mu E_{ij} = \lambda E_{kl}\delta_{kl}\delta_{ij} + 2\mu E_{kl}\delta_{ik}\delta_{jl} \quad (2)$$

よって

$$S_{ij} = C_{ijkl}E_{kl} \quad (3)$$

とかける。但し構成則テンソル \mathbf{C} の成分は、

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{kl}\delta_{ij} + 2\mu\delta_{ik}\delta_{jl} \quad (4)$$

である。これををテンソルで表記すると次のようになる

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} : \mathbf{E} \quad (5)$$

但し \mathbf{C} は 4 階の単位テンソル \mathbf{I}_4 を用いて $\mathbf{C} = \lambda(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) + 2\mu\mathbf{I}_4$ とかけるこれから応力の微小な増分量についても次が成り立つ

$$d\mathbf{S} = \mathbf{C} : d\mathbf{E} \quad (6)$$

$$\bar{C}_{ghef} = \frac{1}{2}(C_{ghef} + C_{ghfe}) = \lambda\delta_{ef}\delta_{gh} + \mu\delta_{ge}\delta_{hf} + \mu\delta_{gf}\delta_{he} \quad (7)$$

これらを用いれば、Total Lagrange 法でサンブナン体を解析することができる。

2.1 曲座標表示

構成則テンソルを曲座標表示すると次のようになる。(但し g^{ij} は計量テンソル)

$$\mathbf{C} = (\lambda g^{ij} g^{kl} + 2\mu g^{ik} g^{jl}) \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l \quad (8)$$

つまり構成則テンソルの反変成分は次のとおりになる。

$$\bar{C}^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu g^{ik} g^{jl} + \mu g^{il} g^{jk} \quad (9)$$

3 Implementation

第二 Piola-Kirchhoff 応力を作るルーティンと初期剛性行列を作るルーティンの例を以下に示す。

3.1 第二 Piola-Kirchhoff 応力を作るルーティン

$$S_{ij} = \lambda E_{kk} \delta_{ij} + 2\mu E_{ij} \quad (10)$$

ここで、次のようにプログラムの中で変数に対応づけられているとする。

- ndim:空間の次元の数
- nnoel:要素あたりの節点数
- lambda= λ
- myu= μ
- stress[i][j]= S_{ij}
- strain[i][j]= E_{ij}

第二 Piola-Kirchhoff 応力を求めるルーティンの実装例は以下のとおり

プログラム 1: 第二 Piola-Kirchhoff 応力を求める

```

1 double stress[ndim][ndim];
2 {
3     double dtmpl = 0.0;
4     for(unsigned int idim=0;idim<ndim;idim++){
5         for(unsigned int jdim=0;jdim<ndim;jdim++){
6             stress[idim][jdim] = 2.0*myu*strain[idim][jdim];
7         }
8         dtmpl += strain[idim][idim];
9     }
10    for(unsigned int idim=0;idim<ndim;idim++){
11        stress[idim][idim] += lambda*dtmpl;
12    }
13 }

```

3.2 初期剛性行列を作るルーティン

数値積分を用いて書くと次のようになる。

$$[K_{Le}]_{i,j}^{p,q} = \int_{V_e} \frac{\partial S_{gh}}{\partial u_j^q} [B_{gh}]_i^p dV \quad (11)$$

$$= \int_{V_e} \bar{C}_{ghgf} [B_{ef}]_j^q [B_{gh}]_i^p dV \quad (12)$$

$$\simeq \sum_{\alpha} \omega_{\alpha} \bar{C}_{ghgf} [B_{ef}]_j^q [B_{gh}]_i^p J_{\alpha} \quad (13)$$

ここで \bar{C} は簡単な構成式テンソルであったので \bar{C}_{efgh} を配列として持たずに直接的に乗算を行うことができる。

$$\bar{C}_{ghgf} [B_{ef}]_j^q [B_{gh}]_i^p = (\lambda \delta_{ef} \delta_{gh} + \mu \delta_{ge} \delta_{hf} + \mu \delta_{gf} \delta_{he}) [B_{ef}]_j^q [B_{gh}]_i^p \quad (14)$$

$$= \mu ([B_{gh}]_j^q [B_{gh}]_i^p + [B_{hg}]_j^q [B_{gh}]_i^p) + \lambda [B_{gg}]_j^q [B_{hh}]_i^p \quad (15)$$

ここで、次のようにプログラムの中で変数が対応づけられているとする。

- ndim:空間の次元の数
- nnoel:要素あたりの節点数
- lambda= λ
- myu= μ

- $\detwei = \omega_\alpha J_\alpha$
- $emat[p][q][i][j] = [K_{NL}e]_{i,j}^{p,q}$
- $stress[g][h] = S_{gh}$
- $dEdu[p][i][g][h] = [B_{gh}]_i^p$

初期剛性行列を作るルーティンは次のようになる。

プログラム 2: 第二 Piola-Kirchhoff 応力を求める

```

1 // 初期剛性行列を足しこむ
2 for(unsigned int inoel=0; inoel<nnoel; inoel++){
3   for(unsigned int jnoel=0; jnoel<nnoel; jnoel++){
4     for(unsigned int idim=0; idim<ndim; idim++){
5       for(unsigned int jdim=0; jdim<ndim; jdim++){
6         { // muの2つの項を足しこむ
7           double dtmp1 = 0.0;
8           for(unsigned int gdim=0; gdim<ndim; gdim++){
9             for(unsigned int hdim=0; hdim<ndim; hdim++){
10              dtmp1 += dEdu[inoel][idim][gdim][hdim]*dEdu[jnoel][jdim][gdim][hdim]
11                +dEdu[inoel][idim][gdim][hdim]*dEdu[jnoel][jdim][hdim][gdim];
12            }
13          }
14          emat[inoel][jnoel][idim][jdim] += detwei*myu*dtmp1;
15        }
16        { // lambdaの項を足しこむ
17          double dtmp1=0.0, dtmp2=0.0;
18          for(unsigned int gdim=0; gdim<ndim; gdim++){
19            dtmp1+=dEdu[inoel][idim][gdim][gdim];
20            dtmp2+=dEdu[jnoel][jdim][gdim][gdim];
21          }
22          emat[inoel][jnoel][idim][jdim] += detwei*lambda*dtmp1:dtmp2;
23        }
24      }
25    }
26  }

```

4 解析例

片持ち梁に重力を掛けて曲げる解析をサンプナン体と線形弾性体について行って様子を確認した。梁の大きさは 1×10 で長辺が 10 分割、短辺が 1 分割されている。梁のヤング率は 1000、ポアソン比は 0.3、応力状態は平面応力を仮定し、梁の密度は 1、重力は下向きに 5 をかけた。

線形弾性体は回転した部分がメッシュが膨張して非現実的な変形をしているのに対して、サンプナン体ではそのような現象はみられず自然な変形をしている。

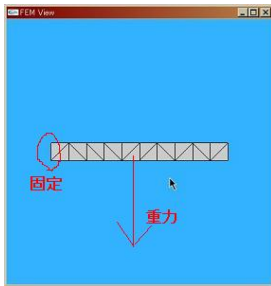


図 1: 解析メッシュ

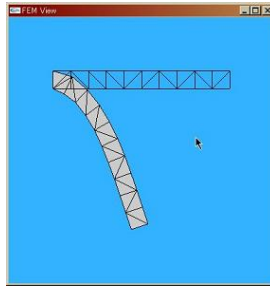


図 2: サンプナン体の変形の様子

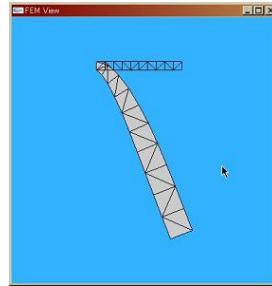


図 3: 線形弾性体の変形の様子

参考文献

- [1] 久田俊明：非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎, 丸善 (1999).
- [2] 渡辺浩志：非線形有限要素法特論, <http://www.sml.k.u-tokyo.ac.jp/members/nabe/>.