

# MITCシェル要素の有限要素法解析\*

梅谷 信行

平成22年7月16日

## 目次

1	概要	2
2	Degenerate シェル要素の定式化	2
2.0.1	補間	2
2.0.2	共変基底ベクトル	3
2.1	歪み	4
2.2	応力	4
2.2.1	超弾性体	4
2.2.2	St.Venant-Kirchhoff 体	5
2.3	変位	5
2.4	共変基底ベクトルの節点値による微分	7
2.4.1	共変基底ベクトルの1回微分	7
2.4.2	共変基底ベクトルの2回微分	7
2.4.3	$\theta=0$ 周りでの共変基底ベクトルの展開	8
2.5	歪みと応力と関係付ける行列	8
2.5.1	非対称な仮想歪	8
2.5.2	節点の変位や回転と歪を関係づける行列	9
2.6	内力ベクトル	9
2.7	接線剛性行列	10
2.7.1	応力の節点値による微分	10

\*これは忘れっぽい著者が昔勉強したことを書き留めておく備忘録です。きっと間違いを多く含んでいます。すいません。ご指摘ご意見などありましたら教えてもらえると有り難いです。

2.7.2	節点の変位や回転と歪の微分を関係づける行列 . . . . .	10
2.7.3	接線剛性行列 . . . . .	11
<b>3</b>	<b>MITC 要素の定式化</b>	<b>12</b>
3.1	Assumed Strain を考慮した歪 . . . . .	12
3.2	応力 . . . . .	13
3.2.1	超弾性体 . . . . .	13
3.2.2	St.Venant-Kirchhoff 体 . . . . .	14
3.3	仮想歪みと内力 . . . . .	14
3.4	内力 . . . . .	15
3.5	接線剛性行列 . . . . .	15
3.5.1	応力の微分 . . . . .	15
3.5.2	歪の微分 . . . . .	15
3.5.3	接線剛性行列 . . . . .	16
<b>4</b>	<b>参考にしたもの</b>	<b>17</b>

## 1 概要

MITC(Mixed Interpolation of Tensorial Components) 要素とは, Degenerate シェル要素に Assumed Strain と呼ばれる面外剪断歪の補間を入れることで, シェアロッキングを回避して, 薄肉も扱えるようにしたシェル要素である. ここでは MITC を提案した論文 [1] に基づいて節点の MITC 要素の定式化について説明する.

## 2 Degenerate シェル要素の定式化

図 2 に示すように, Degenerate 要素とは Solid 要素を一方向に圧縮したような要素である. 要素内部で変位や歪が応力などが Solid 要素と同じように定義できるために, いろいろな構成式を扱うことができる. ここで MITC 要素の前段階として Degenerate 要素を用いたシェル要素の定式化を行う.

### 2.0.1 補間

面内の補間関数  $N$  は次のように定義される.

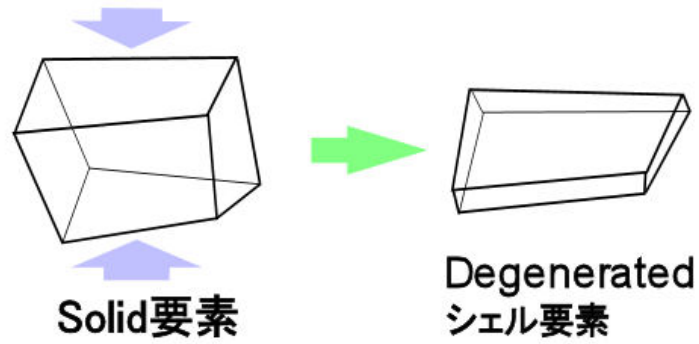


図 1: Concept of Degenerate Shell

$$\begin{cases} N^1 = \frac{1}{4}(1 - r^1)(1 - r^2) \\ N^2 = \frac{1}{4}(1 + r^1)(1 - r^2) \\ N^3 = \frac{1}{4}(1 + r^1)(1 + r^2) \\ N^4 = \frac{1}{4}(1 - r^1)(1 + r^2) \end{cases} \quad (1)$$

$t$  は板の厚みを表しているとする、次のように板の中の節点の変形前の位置  $\mathbf{X}$  と変形後の位置  $\mathbf{x}$  は補間される。

$$\mathbf{X}(r^1, r^2, r^3) = N^p(r^1, r^2)\mathbf{X}^p + \frac{t}{2}r^3N^p(r^1, r^2)\mathbf{V}_3^p \quad (2)$$

$$\mathbf{x}(r^1, r^2, r^3) = N^p(r^1, r^2)\mathbf{x}^p + \frac{t}{2}r^3N^p(r^1, r^2)\mathbf{v}_3^p \quad (3)$$

## 2.0.2 共変基底ベクトル

変形前と変形後の共変基底ベクトル  $\mathbf{G}, \mathbf{g}$  はそれぞれ

$$\mathbf{G}_h = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial r^h} \quad (4)$$

$$\mathbf{g}_h = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r^h} \quad (5)$$

のように表される。実際にこれを計算してみよう。

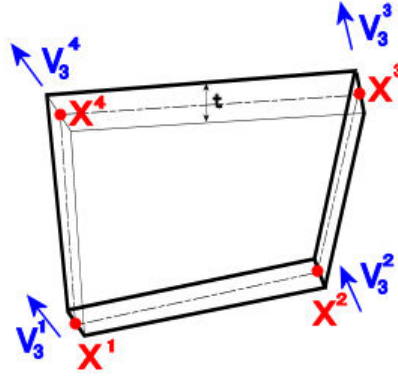


図 2: Interpolation of MITC shell element

$$\begin{cases} \mathbf{G}_1 = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial r^1} = \frac{\partial N^p(r^1, r^2)}{\partial r^1} \mathbf{X}^p + \frac{t}{2} r^3 \frac{\partial N^p(r^1, r^2)}{\partial r^1} \mathbf{V}_3^p \\ \mathbf{G}_2 = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial r^2} = \frac{\partial N^p(r^1, r^2)}{\partial r^2} \mathbf{X}^p + \frac{t}{2} r^3 \frac{\partial N^p(r^1, r^2)}{\partial r^2} \mathbf{V}_3^p \\ \mathbf{G}_3 = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial r^3} = \frac{t}{2} N^p(r^1, r^2) \mathbf{V}_3^p \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r^1} = \frac{\partial N^p(r^1, r^2)}{\partial r^1} \mathbf{x}^p + \frac{t}{2} r^3 \frac{\partial N^p(r^1, r^2)}{\partial r^1} \mathbf{v}_3^p \\ \mathbf{g}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r^2} = \frac{\partial N^p(r^1, r^2)}{\partial r^2} \mathbf{x}^p + \frac{t}{2} r^3 \frac{\partial N^p(r^1, r^2)}{\partial r^2} \mathbf{v}_3^p \\ \mathbf{g}_3 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r^3} = \frac{t}{2} N^p(r^1, r^2) \mathbf{v}_3^p \end{cases} \quad (7)$$

## 2.1 歪み

Green-Lagrange 歪み  $E$  は次のとおり

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = \frac{1}{2} (g_{ij} - G_{ij}) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j - \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad (8)$$

## 2.2 応力

### 2.2.1 超弾性体

物質が超弾性体である場合は次のように第 2 Piola-Kirchhoff 応力は Green-Lagrange 歪みから求められる。

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} \quad (9)$$

### 2.2.2 St.Venant-Kirchhoff 体

物質が St.Venant-Kirchhoff 体である場合は次のように第 2 Piola-Kirchhoff 応力は Green-Lagrange 歪みから求められる。

$$\mathbf{S} = \lambda \text{tr}(\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E} \quad (10)$$

$$\text{tr}(\mathbf{E}) = \text{tr}(E_i^j G^i \otimes G_j) = E_i^j G^i \cdot G_j = E_i^j \delta_j^i = E_i^i \quad (11)$$

$$= G^p \cdot (E_{ij} G^i \otimes G^j) \cdot G_k = E_{ij} (G^i \cdot G^p) (G^p \cdot G_j) = E_{ij} G^{ik} \delta_j^p \quad (12)$$

$$= E_{ij} G^{ij} \quad (13)$$

これを用いると第二 Piola-Kirchhoff 応力  $\mathbf{S}$  の反変成分は次のとおり

$$S^{gh} = G^g \cdot \mathbf{S} \cdot G^h \quad (14)$$

$$= \lambda \text{tr}(\mathbf{E}) G^g \cdot G^h + 2\mu G^g \cdot \mathbf{E} \cdot G^h \quad (15)$$

$$= \lambda (E_{ij} G^{ij}) G^{gh} + 2\mu G^g \cdot (E_{ij} G^i \otimes G^j) \cdot G^h \quad (16)$$

$$= \lambda (E_{ij} G^{ij}) G^{gh} + 2\mu (E_{ij} G^{ig} G^{jh}) \quad (17)$$

## 2.3 変位

$$\mathbf{u} = N^p(r^1, r^2) \mathbf{u}^p + \frac{t}{2} r^3 N^p(r^1, r^2) (\mathbf{v}_3^p - \mathbf{V}_3^p) \quad (18)$$

さて、変位が  $\mathbf{u}$  から  $\mathbf{u}'$  に変化したときの増分  $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}' - \mathbf{u}$  について考えよう。

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}' - \mathbf{u} = N^p(r^1, r^2) (\mathbf{u}'^p - \mathbf{u}^p) + \frac{t}{2} r^3 N^p(r^1, r^2) (\mathbf{v}_3'^p - \mathbf{v}_3^p) \quad (19)$$

$\mathbf{v}_3'^p$  は変形した後のディレクターのベクトルである。軸性ベクトル  $\theta^p$  を導入すると、

$$\mathbf{v}_3'^p = \cos |\theta^p| (\mathbf{v}_3^p) + \sin |\theta^p| \left( \frac{\theta^p}{|\theta^p|} \times \mathbf{v}_3^p \right) \quad (20)$$

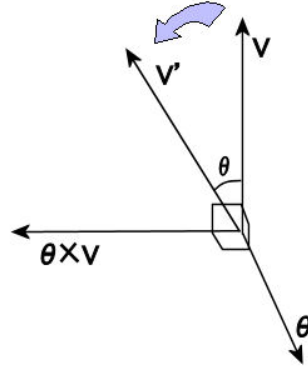


図 3: Rotation of director vector

となる。これを代入すると、

$$\Delta \mathbf{u} = N^p(r^1, r^2) \Delta \mathbf{u}^p + \frac{t}{2} r^3 N^p(r^1, r^2) \{ (\cos |\theta^p| - 1) (\mathbf{v}_3^p) + \frac{\sin |\theta^p|}{|\theta^p|} (\theta^p \times \mathbf{v}_3^p) \} \quad (21)$$

となる。ここで節点変位  $\mathbf{u}^p$  が初期状態からの変位であるのに対して  $\theta$  が変形した後の状態からの増分であることに注意されたい。よって、興味があるのは  $\theta = 0$  付近での変位の挙動である。  $\sin \theta, \cos \theta$  の  $\theta = 0$  周りのテーラー展開を用いて

$$\sin \theta = \theta - \frac{1}{3!} \theta^3 + \frac{1}{5!} \theta^5 \dots, \quad \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 - \frac{1}{3!} \theta^2 + \frac{1}{5!} \theta^4 \dots \quad (22)$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{1}{2!} \theta^2 + \frac{1}{4!} \theta^4 \dots \quad (23)$$

となる。これらを用いて  $\theta$  に対して次数ごとに書き出すと

$$\Delta \mathbf{u} = N^p(r^1, r^2) \Delta \mathbf{u}^p + \frac{t}{2} r^3 N^p(r^1, r^2) \left\{ \underbrace{\theta^p \times \mathbf{v}_3^p}_{1st} + \underbrace{\left(-\frac{1}{2} |\theta^p|^2\right) (\mathbf{v}_3^p)}_{2nd} + \underbrace{\frac{1}{6} |\theta^p|^2 (\theta^p \times \mathbf{v}_3^p)}_{3rd} + O(\theta^4) \right\} \quad (24)$$

のようになる。ここでの  $\times$  は外積で、成分表示すると以下のようなになる。

$$\theta^p \times \mathbf{v}_3^p = \begin{bmatrix} 0 & v_{33}^p & -v_{32}^p \\ -v_{33}^p & 0 & v_{31}^p \\ +v_{32}^p & -v_{31}^p & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1^p \\ \theta_2^p \\ \theta_3^p \end{Bmatrix} = \epsilon_{ijk} \theta_i^p v_{3j}^p \mathbf{e}_k \quad (25)$$

ここで、 $\epsilon$  はレヴィ・チヴィタの記号である。

## 2.4 共変基底ベクトルの節点値による微分

となる。これらを用いて、歪みや接線剛性行列を計算する。歪みを求める時は変位の1回微分、接線剛性行列を求める時は変位の2回微分が必要となる。

$$\mathbf{g}_h = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r^h} = \frac{\partial (\mathbf{X} + \mathbf{u})}{\partial r^h} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^h} \quad (26)$$

### 2.4.1 共変基底ベクトルの1回微分

$$\frac{\partial \mathbf{g}_h}{\partial u_i^p} = \frac{\partial}{\partial u_i^p} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^h} = \frac{\partial}{\partial r^h} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial u_i^p} = \frac{\partial N^p(r^1, r^2)}{\partial r^h} \mathbf{e}_i \quad (27)$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}_h(\theta)}{\partial \theta_i^p} = \frac{\partial}{\partial \theta_i^p} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^h} = \frac{\partial}{\partial r^h} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta_i^p} = \frac{t}{2} \frac{\partial r^3 N^p(r^1, r^2)}{\partial r^h} (\epsilon_{ijk} v_{3j}^p \mathbf{e}_k - \theta_i^p (\mathbf{v}_3^p) + O(\theta^2)) \quad (28)$$

### 2.4.2 共変基底ベクトルの2回微分

$$\frac{\partial^2 \mathbf{g}_h}{\partial u_j^q \partial u_i^p} = 0 \quad (29)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{g}_h}{\partial \theta_j^q \partial u_i^p} = \frac{\partial^2 \mathbf{g}_h}{\partial u_j^q \partial \theta_i^p} = 0 \quad (30)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{g}_h(\theta)}{\partial \theta_j^q \partial \theta_i^p} = \frac{\partial}{\partial \theta_j^q} \left( \frac{\partial \mathbf{g}_h(\theta)}{\partial \theta_i^p} \right) \quad (31)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \theta_j^q} \left\{ \frac{t}{2} \frac{\partial r^3 N^p(r^1, r^2)}{\partial r^h} (\epsilon_{ijk} v_{3j}^p \mathbf{e}_k - \theta_i^p (\mathbf{v}_3^p) + O(\theta^2)) \right\} \quad (32)$$

$$= \frac{t}{2} \frac{\partial r^3 N^p(r^1, r^2)}{\partial r^h} (-\delta_{pq} \delta_{ij} \mathbf{v}_3^p + O(\theta)) \quad (33)$$

### 2.4.3 $\theta=0$ 周りでの共変基底ベクトルの展開

$$\frac{\partial \mathbf{g}_h(0)}{\partial \theta_i^p} = \frac{t}{2} \frac{\partial r^3 N^p(r^1, r^2)}{\partial r^h} \epsilon_{ijk} v_{3j}^p \mathbf{e}_k \quad (34)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{g}_h(0)}{\partial \theta_j^q \partial \theta_i^p} = -\frac{t}{2} \frac{\partial r^3 N^p(r^1, r^2)}{\partial r^h} \mathbf{v}_3^p \delta_{pq} \delta_{ij} \quad (35)$$

$\mathbf{g}_h$  に対する角度による 2 階微分を考慮することで、角度の変化が大きい時に有効である。この項は特に**有限回転増分項**と呼ばれる。有限回転増分の MITC への取り込みは論文 [2] によってなされている。

以降、 $\frac{\partial \mathbf{g}_h(0)}{\partial \theta_i^p}$ ,  $\frac{\partial^2 \mathbf{g}_h(0)}{\partial \theta_j^q \partial \theta_i^p}$  を簡単のため、 $\frac{\partial \mathbf{g}_h}{\partial \theta_i^p}$ ,  $\frac{\partial^2 \mathbf{g}_h}{\partial \theta_j^q \partial \theta_i^p}$  と書く。これらを用いると、共変基底ベクトル  $\mathbf{g}_h$  の 2 次までの節点値の変化による変動は以下のとおり。

$$\Delta \mathbf{g}_h = \frac{\partial \mathbf{g}_h}{\partial u_i^p} \Delta u_i^p + \frac{\partial \mathbf{g}_h}{\partial \theta_i^p} \theta_i^p + \frac{\partial^2 \mathbf{g}_h}{\partial \theta_j^q \partial \theta_i^p} \theta_i^p \theta_j^q + O(\theta^3) + O(u^3) \quad (36)$$

## 2.5 歪みと応力と関係付ける行列

### 2.5.1 非対称な仮想歪

非対称な仮想歪テンソル

$$\delta \bar{E}_{gh} = \mathbf{g}_g \cdot \delta \mathbf{g}_h \quad (37)$$

とおこう。このテンソルの対称部分は仮想 Green-Lagrange 歪になる。

$$\delta E_{gh} = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_g \cdot \delta \mathbf{g}_h + \delta \mathbf{g}_g \cdot \mathbf{g}_h) = \frac{1}{2} (\delta \bar{E}_{gh} + \delta \bar{E}_{hg}) = \text{Sym}(\delta \bar{E}_{gh}) \quad (38)$$

よって仮想 Green-Lagrange 歪と対称なテンソルとの内積はこの非対称な仮想歪テンソルとの内積に置き換えることができる。

$$S^{gh} \delta E_{gh} = S^{gh} \frac{1}{2} (\delta \bar{E}_{gh} + \delta \bar{E}_{hg}) = \frac{1}{2} S^{gh} \delta \bar{E}_{gh} + \frac{1}{2} S^{hg} \delta \bar{E}_{hg} = S^{gh} \delta \bar{E}_{gh} \quad (39)$$

非対称の仮想歪テンソルは項の数が半分に減っていて扱いやすいというメリットがある。



## 2.5.2 節点の変位や回転と歪を関係づける行列

$$\delta \mathbf{g}_h = \frac{\partial \mathbf{g}_h}{\partial u_i^p} \delta u_i^p + \frac{\partial \mathbf{g}_h}{\partial \theta_i^p} \delta \theta_i^p \quad (40)$$

$$\delta \bar{E}_{gh} = \mathbf{g}_g \cdot \delta \mathbf{g}_h = \mathbf{g}_g \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_h}{\partial u_i^p} \delta u_i^p + \mathbf{g}_g \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_h}{\partial \theta_i^p} \delta \theta_i^p \quad (41)$$

$$= [B_{gh}^U]_i^p \delta u_i^p + [B_{gh}^R]_i^p \delta \theta_i^p \quad (42)$$

ここで

$$[B_{gh}^U]_i^p = \mathbf{g}_g \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_h}{\partial u_i^p} = \mathbf{g}_{gi} \frac{\partial N^p(r^1, r^2)}{\partial r^h} \quad (43)$$

$$[B_{gh}^R]_i^p = \mathbf{g}_g \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_h}{\partial \theta_i^p} = \mathbf{g}_{gk} \frac{t}{2} \frac{\partial r^3 N^p(r^1, r^2)}{\partial r^h} \epsilon_{ijk} v_{3j}^p \quad (44)$$

とおいた。またこの  $[B]$  を用いれば、

$$\frac{\partial E_{gh}}{\partial u_i^p} = \frac{1}{2} ([B_{gh}^U]_i^p + [B_{hg}^U]_i^p) \quad (45)$$

$$\frac{\partial E_{gh}}{\partial \theta_i^p} = \frac{1}{2} ([B_{gh}^R]_i^p + [B_{hg}^R]_i^p) \quad (46)$$

を満たすことが容易に確認できる。

## 2.6 内力ベクトル

内力は以下のとおりになる。

$$\{Q_e^U\}_i^p = \int_{V_e} S^{gh} \frac{\partial E_{gh}}{\partial u_i^p} dV \quad (47)$$

$$= \int_{V_e} S^{gh} \frac{1}{2} ([B_{gh}^U]_i^p + [B_{hg}^U]_i^p) dV \quad (48)$$

$$= \int_{V_e} S^{gh} [B_{gh}^U]_i^p dV \quad (49)$$

$$= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 S^{gh} [B_{gh}^U]_i^p J dr^3 dr^2 dr^1 \quad (50)$$

$$\{Q_e^R\}_i^p = \int_{V_e} S^{gh} \frac{\partial E_{gh}}{\partial \theta_i^p} dV \quad (51)$$

$$= \int_{V_e} S^{gh} \frac{1}{2} ([B_{gh}^U]_i^p + [B_{hg}^U]_i^p) dV \quad (52)$$

$$= \int_{V_e} S^{gh} [B_{gh}^R]_i^p dV \quad (53)$$

$$= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 S^{gh} [B_{gh}^R]_i^p J dr^3 dr^2 dr^1 \quad (54)$$

## 2.7 接線剛性行列

### 2.7.1 応力の節点値による微分

$$\delta S^{gh} = C^{ghef} \delta E_{ef} \quad (55)$$

の関係があるとする.

$$\frac{\partial S^{gh}}{\partial u_j^q} = C^{ghef} \frac{\partial E_{ef}}{\partial u_j^q} = C^{ghef} \frac{1}{2} ([B_{ef}^U]_j^q + [B_{fe}^U]_j^q) = \bar{C}^{ghef} [B_{ef}^U]_j^q \quad (56)$$

$$\frac{\partial S^{gh}}{\partial \theta_j^q} = C^{ghef} \frac{\partial E_{ef}}{\partial \theta_j^q} = C^{ghef} \frac{1}{2} ([B_{ef}^R]_j^q + [B_{fe}^R]_j^q) = \bar{C}^{ghef} [B_{ef}^R]_j^q \quad (57)$$

但し,

$$\bar{C}^{ghef} = \frac{1}{2} (C^{ghef} + C^{ghfe}) \quad (58)$$

とおいた.

### 2.7.2 節点の変位や回転と歪の微分を関係づける行列

[B] は節点の変位や回転と歪を関係づける行列であった. 接線剛性行列を計算するために, この [B] をさらに節点値で微分することで, 歪の微分を節点値から求める行列 [A] を作ろう.

$$[A_{hg}^{UU}]_{i,j}^{p,q} = \frac{\partial [B_{gh}^U]_i^p}{\partial u_j^q} = \frac{\partial}{\partial u_j^q} \left( \mathbf{g}_g \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_h}{\partial u_i^p} \right) = \frac{\partial \mathbf{g}_g}{\partial u_j^q} \frac{\partial \mathbf{g}_h}{\partial u_i^p} \quad (59)$$

$$[A_{hg}^{UR}]_{i,j}^{p,q} = \frac{\partial [B_{gh}^U]_i^p}{\partial \theta_j^q} = \frac{\partial}{\partial \theta_j^q} \left( \mathbf{g}_g \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_h}{\partial u_i^p} \right) = \frac{\partial \mathbf{g}_h}{\partial u_i^p} \frac{\partial \mathbf{g}_g}{\partial \theta_j^q} \quad (60)$$

$$[A_{hg}^{RU}]_{i,j}^{p,q} = \frac{\partial [B_{gh}^R]_i^p}{\partial u_j^q} = \frac{\partial}{\partial u_j^q} \left( \mathbf{g}_g \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_h}{\partial \theta_i^p} \right) = \frac{\partial \mathbf{g}_g}{\partial u_j^q} \frac{\partial \mathbf{g}_h}{\partial \theta_i^p} = [A_{hg}^{UR}]_{j,i}^{q,p} \quad (61)$$

$$[A_{hg}^{RR}]_{i,j}^{p,q} = \frac{\partial [B_{gh}^R]_i^p}{\partial \theta_j^q} = \frac{\partial}{\partial \theta_j^q} \left( \mathbf{g}_g \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_h}{\partial \theta_i^p} \right) = \frac{\partial \mathbf{g}_g}{\partial \theta_j^q} \frac{\partial \mathbf{g}_h}{\partial \theta_i^p} + \mathbf{g}_g \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{g}_h}{\partial \theta_j^q \partial \theta_i^p} \quad (62)$$

### 2.7.3 接線剛性行列

接線剛性を計算すると以下のとおり

$$[K_e^{UU}]_{i,j}^{p,q} = \frac{\partial \{Q_e^U\}_i^p}{\partial u_j^q} \quad (63)$$

$$= \int_{V_e} S^{gh} \frac{\partial [B_{gh}^U]_i^p}{\partial u_j^q} + \frac{\partial S^{gh}}{\partial u_j^q} [B_{gh}^U]_i^p dV \quad (64)$$

$$= \int_{V_e} S^{gh} [A_{hg}^{UU}]_{i,j}^{p,q} + \bar{C}^{ghgf} [B_{ef}^U]_j^q [B_{gh}^U]_i^p dV \quad (65)$$

$$[K_e^{UR}]_{i,j}^{p,q} = \frac{\partial \{Q_e^U\}_i^p}{\partial \theta_j^q} \quad (66)$$

$$= \int_{V_e} S^{gh} \frac{\partial [B_{gh}^U]_i^p}{\partial \theta_j^q} + \frac{\partial S^{gh}}{\partial \theta_j^q} [B_{gh}^U]_i^p dV \quad (67)$$

$$= \int_{V_e} S^{gh} [A_{hg}^{UR}]_{i,j}^{p,q} + \bar{C}^{ghgf} [B_{ef}^U]_j^q [B_{gh}^U]_i^p dV \quad (68)$$

$$[K_e^{RU}]_{i,j}^{p,q} = \frac{\partial \{Q_e^R\}_i^p}{\partial u_j^q} \quad (69)$$

$$= \int_{V_e} S^{gh} \frac{\partial [B_{gh}^R]_i^p}{\partial u_j^q} + \frac{\partial S^{gh}}{\partial u_j^q} [B_{gh}^R]_i^p dV \quad (70)$$

$$= \int_{V_e} S^{gh} [A_{hg}^{RU}]_{i,j}^{p,q} + \bar{C}^{ghef} [B_{ef}^U]_j^q [B_{gh}^R]_i^p dV \quad (71)$$

$$= [K^{UR}]_{j,i}^{q,p} \quad (72)$$

$$[K_e^{RR}]_{i,j}^{p,q} = \frac{\partial (Q_e^R)_i^p}{\partial \theta_j^q} \quad (73)$$

$$= \int_{V_e} S^{gh} \frac{\partial [B_{gh}^R]_i^p}{\partial \theta_j^q} + \frac{\partial S^{gh}}{\partial \theta_j^q} [B_{gh}^R]_i^p dV \quad (74)$$

$$= \int_{V_e} S^{gh} [A_{hg}^{RR}]_{i,j}^{p,q} + \bar{C}^{ghef} [B_{ef}^R]_j^q [B_{gh}^R]_i^p dV \quad (75)$$

### 3 MITC 要素の定式化

Degenerate シェルは板圧が薄くなるとロッキングが起こってしまうために、実際より硬い解を得てしまうことが知られている。これは面外剪断歪が原因であることが知られている。そこで、面外剪断歪については以下の4点における値を用いた補間によって求める。ここで、要素内部の点を次のように一般化座標で表すと、

$$\mathbf{x}(r^1, r^2, r^3) \quad (76)$$

図3のように、歪を補間する時に使う点は以下のとおりとする

$$\begin{cases} \mathbf{x}_A = \mathbf{x}(0, 1, 0) \\ \mathbf{x}_B = \mathbf{x}(-1, 0, 0) \\ \mathbf{x}_C = \mathbf{x}(0, -1, 0) \\ \mathbf{x}_D = \mathbf{x}(1, 0, 0) \end{cases} \quad (77)$$

#### 3.1 Assumed Strain を考慮した歪

面外剪断歪みについて Assumed Strain を考える。Assumed Strain では歪みの共変成分について再補間を行う。

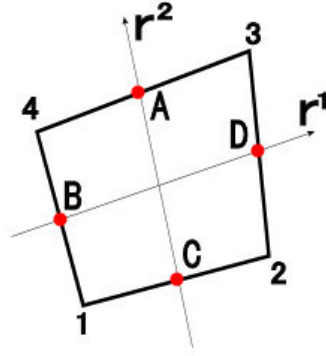


図 4: Sampling Points

$$\hat{E}_{11} = E_{11} \quad \hat{E}_{22} = E_{22} \quad \hat{E}_{33} = E_{33} \quad (78)$$

$$\hat{E}_{12} = \hat{E}_{21} = E_{12} \quad (79)$$

$$\hat{E}_{13} = \hat{E}_{31} = \frac{1}{2}(1+r^2)E_{13A} + \frac{1}{2}(1-r^2)E_{13C} \quad (80)$$

$$\hat{E}_{23} = \hat{E}_{32} = \frac{1}{2}(1+r^1)E_{23D} + \frac{1}{2}(1-r^1)E_{23B} \quad (81)$$

これらを用いると Assumed Strain を考慮した Green-Lagrange 歪み  $E$  は次のようになる

$$\hat{\mathbf{E}} = \hat{E}_{ij}G^i \otimes G^j \quad (82)$$

$$= E_{11}G^1 \otimes G^1 + E_{22}G^2 \otimes G^2 + E_{33}G^3 \otimes G^3 + E_{12}(G^1 \otimes G^2 + G^2 \otimes G^1) \quad (83)$$

$$+ \hat{E}_{13}(G^1 \otimes G^3 + G^3 \otimes G^1) + \hat{E}_{23}(G^2 \otimes G^3 + G^3 \otimes G^2) \quad (84)$$

## 3.2 応力

Assumed Strain を考慮した歪から応力を求める.

### 3.2.1 超弾性体

$$\hat{\mathbf{S}} = \frac{\partial W}{\partial \hat{\mathbf{E}}} \quad (85)$$

### 3.2.2 St.Venant-Kirchhoff 体

$$\hat{S}^{gh} = \lambda(\hat{E}_{ij}G^{ij})G^{gh} + 2\mu(\hat{E}_{ij}G^{ig}G^{jh}) \quad (86)$$

### 3.3 仮想歪みと内力

非対称な仮想歪みについても、Assumed Strain を考慮したテンソル  $\delta\hat{E}$  を考えよう。このテンソルの共変成分は次のようになる。

$$\delta\hat{E}_{gh} = \begin{cases} \delta\bar{E}_{gh} & \{gh\} = \{11\}, \{22\}, \{33\}, \{12\}, \{21\} \\ \frac{1}{2}(1+r^2)\delta\bar{E}_{ghA} + \frac{1}{2}(1-r^2)\delta\bar{E}_{ghC} & \{gh\} = \{13\}, \{31\} \\ \frac{1}{2}(1+r^1)\delta\bar{E}_{ghD} + \frac{1}{2}(1-r^1)\delta\bar{E}_{ghB} & \{gh\} = \{23\}, \{32\} \end{cases} \quad (87)$$

ここで、変位や回転と歪みを結びつける行列  $[B]$  を用いると、

$$\delta\bar{E}_{gh} = [B_{gh}^U]_i^p \delta u_i^p + [B_{gh}^R]_i^p \delta \theta_i^p \quad (88)$$

のように書けた。 $[\hat{B}]$  を次のように定義すると、

$$[\hat{B}_{gh}]_i^p = \begin{cases} [B_{gh}]_i^p & \{gh\} = \{11\}, \{22\}, \{33\}, \{12\}, \{21\} \\ \frac{1}{2}(1+r^2)[B_{gh}]_i^p_A + \frac{1}{2}(1-r^2)[B_{gh}]_i^p_C & \{gh\} = \{13\}, \{31\} \\ \frac{1}{2}(1+r^1)[B_{gh}]_i^p_D + \frac{1}{2}(1-r^1)[B_{gh}]_i^p_B & \{gh\} = \{23\}, \{32\} \end{cases} \quad (89)$$

これを用いると Assumed Strain を考慮した仮想歪みは

$$\delta\hat{E}_{gh} = [\hat{B}_{gh}^U]_i^p \delta u_i^p + [\hat{B}_{gh}^R]_i^p \delta \theta_i^p \quad (90)$$

のように一貫して書くことができる。

### 3.4 内力

AssumedStain を考慮した歪を使うと、内力は次のようになる。

$$\{Q_e^U\}_i^p = \int_{V_e} \hat{S}^{gh} \frac{\partial \hat{E}_{gh}}{\partial u_i^p} dV = \int_{V_e} \hat{S}^{gh} \frac{\partial \hat{E}_{gh}}{\partial u_i^p} dV = \int_{V_e} \hat{S}^{gh} [\hat{B}_{gh}^U]_i^p dV \quad (91)$$

$$\{Q_e^R\}_i^p = \int_{V_e} \hat{S}^{gh} \frac{\partial \hat{E}_{gh}}{\partial \theta_i^p} dV = \int_{V_e} \hat{S}^{gh} \frac{\partial \hat{E}_{gh}}{\partial \theta_i^p} dV = \int_{V_e} \hat{S}^{gh} [\hat{B}_{gh}^R]_i^p dV \quad (92)$$

### 3.5 接線剛性行列

#### 3.5.1 応力の微分

$$\delta \hat{S}^{gh} = C^{ghef} \delta \hat{E}_{ef} \quad (93)$$

$$\frac{\partial \hat{S}^{gh}}{\partial u_j^q} = C^{ghef} \frac{\partial \hat{E}_{ef}}{\partial u_j^q} = C^{ghef} \frac{1}{2} ([\hat{B}_{ef}^U]_j^q + [\hat{B}_{fe}^U]_j^q) = \bar{C}^{ghef} [\hat{B}_{ef}^U]_j^q \quad (94)$$

$$\frac{\partial \hat{S}^{gh}}{\partial \theta_j^q} = C^{ghef} \frac{\partial \hat{E}_{ef}}{\partial \theta_j^q} = C^{ghef} \frac{1}{2} ([\hat{B}_{ef}^R]_j^q + [\hat{B}_{fe}^R]_j^q) = \bar{C}^{ghef} [\hat{B}_{ef}^R]_j^q \quad (95)$$

#### 3.5.2 歪の微分

歪を微分したものにも Assumed Strain を考慮しよう。

$$[\hat{A}_{gh}]_{i,j}^{p,q} = \begin{cases} [A_{gh}]_{i,j}^{p,q} & \{gh\} = \{11\}, \{22\}, \{33\}, \{12\}, \{21\} \\ \frac{1}{2}(1+r^2)[A_{gh}]_{i,j}^{p,q}_A + \frac{1}{2}(1-r^2)[A_{gh}]_{i,j}^{p,q}_C & \{gh\} = \{13\}, \{31\} \\ \frac{1}{2}(1+r^1)[A_{gh}]_{i,j}^{p,q}_D + \frac{1}{2}(1-r^1)[A_{gh}]_{i,j}^{p,q}_B & \{gh\} = \{23\}, \{32\} \end{cases} \quad (96)$$

とおくと、

$$\frac{\partial [\hat{B}_{gh}^U]_i^p}{\partial u_j^q} = [\hat{A}_{hg}^{UU}]_{i,j}^{p,q} \quad \frac{\partial [\hat{B}_{gh}^U]_i^p}{\partial \theta_j^q} = [\hat{A}_{hg}^{UR}]_{i,j}^{p,q} \quad \frac{\partial [\hat{B}_{gh}^R]_i^p}{\partial u_j^q} = [\hat{A}_{hg}^{RU}]_{i,j}^{p,q} \quad \frac{\partial [\hat{B}_{gh}^R]_i^p}{\partial \theta_j^q} = [\hat{A}_{hg}^{RR}]_{i,j}^{p,q} \quad (97)$$

### 3.5.3 接線剛性行列

接線剛性を計算すると以下のとおり

$$[K_e^{UU}]_{i,j}^{p,q} = \frac{\partial \{Q_e^U\}_i^p}{\partial u_j^q} \quad (98)$$

$$= \int_{V_e} \hat{S}^{gh} \frac{\partial [\hat{B}_{gh}^U]_i^p}{\partial u_j^q} + \frac{\partial \hat{S}^{gh}}{\partial u_j^q} [\hat{B}_{gh}^U]_i^p dV \quad (99)$$

$$= \int_{V_e} \hat{S}^{gh} [\hat{A}_{hg}^{UU}]_{i,j}^{p,q} + \bar{C}^{ghef} [\hat{B}_{ef}^U]_j^q [\hat{B}_{gh}^U]_i^p dV \quad (100)$$

$$[K_e^{UR}]_{i,j}^{p,q} = \frac{\partial \{Q_e^U\}_i^p}{\partial \theta_j^q} \quad (101)$$

$$= \int_{V_e} \hat{S}^{gh} \frac{\partial [\hat{B}_{gh}^U]_i^p}{\partial \theta_j^q} + \frac{\partial \hat{S}^{gh}}{\partial \theta_j^q} [\hat{B}_{gh}^U]_i^p dV \quad (102)$$

$$= \int_{V_e} \hat{S}^{gh} [\hat{A}_{hg}^{UR}]_{i,j}^{p,q} + \bar{C}^{ghef} [\hat{B}_{ef}^U]_j^q [\hat{B}_{gh}^U]_i^p dV \quad (103)$$

$$[K_e^{RU}]_{i,j}^{p,q} = \frac{\partial \{Q_e^R\}_i^p}{\partial u_j^q} \quad (104)$$

$$= \int_{V_e} \hat{S}^{gh} \frac{\partial [\hat{B}_{gh}^R]_i^p}{\partial u_j^q} + \frac{\partial \hat{S}^{gh}}{\partial u_j^q} [\hat{B}_{gh}^R]_i^p dV \quad (105)$$

$$= \int_{V_e} \hat{S}^{gh} [\hat{A}_{hg}^{RU}]_{i,j}^{p,q} + \bar{C}^{ghef} [\hat{B}_{ef}^U]_j^q [\hat{B}_{gh}^R]_i^p dV \quad (106)$$

$$= [K^{UR}]_{j,i}^{q,p} \quad (107)$$

$$[K_e^{RR}]_{i,j}^{p,q} = \frac{\partial \{Q_e^R\}_i^p}{\partial \theta_j^q} \quad (108)$$

$$= \int_{V_e} \hat{S}^{gh} \frac{\partial [\hat{B}_{gh}^R]_i^p}{\partial \theta_j^q} + \frac{\partial \hat{S}^{gh}}{\partial \theta_j^q} [\hat{B}_{gh}^R]_i^p dV \quad (109)$$

$$= \int_{V_e} \hat{S}^{gh} [\hat{A}_{hg}^{RR}]_{i,j}^{p,q} + \bar{C}^{ghef} [\hat{B}_{ef}^U]_j^q [\hat{B}_{gh}^R]_i^p dV \quad (110)$$



## 4 参考にしたもの

[1],[2],[3],[4]

### 参考文献

- [1] Bathe, K. and Dvorkin, E.: A formulation of general shell elements-the use of mixed interpolation of tensorial components, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 22, No. 3, pp. 697–722 (1986).
- [2] 野口裕久, 久田俊明：有限回転増分を考慮した効率的シェル要素の開発およびその評価, 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 58, pp. 127–134 (1992).
- [3] 渡辺浩志：非線形有限要素法特論, <http://www.sml.k.u-tokyo.ac.jp/members/nabe/>.
- [4] Taber, L. A.: *Nonlinear Theory of Elasticity: Applications in Biomechanics*, World Scientific Pub Co Inc (2004).