

線形弾性体の有限要素法による解法*

梅谷 信行

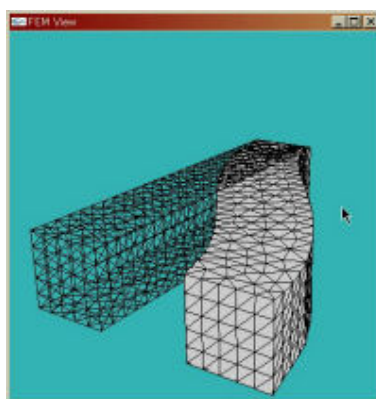
平成 22 年 7 月 12 日

目次

1	線形弾性体	2
1.1	線形弾性体における歪	2
1.2	線形弾性体の構成式	3
1.3	問題設定	3
1.4	弱形式化	4
1.5	変位を用いた表示への弱形式化された支配方程式の変形	5
2	有限要素法離散化	6
2.1	積分領域分割	6
2.2	内挿関数の導入	7
3	要素における離散化	8
3.1	アイソパラメトリック要素	8
3.1.1	プログラミング例	8
4	テンソルのベクトル表記	9
5	2次元問題	11
5.1	平面歪	11
5.2	平面応力	12

*これは忘れっぽい著者が昔勉強したことを書き留めておく備忘録です。きっと間違いを多く含んでいます。すいません。ご指摘ご意見などありましたら教えてもらえると有り難いです。

6 簡単な2次元問題の計算例	13
6.1 2次元単純引っ張り問題	13
6.1.1 平面歪問題	14
6.1.2 平面応力状態	14
7 線形弾性体の解析をするときに注意すべき4つの点	14
7.1 ポアソン比が0.5に近づくとき解の精度が落ちる問題について	15
7.2 曲げ問題は要素の種類によっては解の精度が悪い問題について	15
7.3 変形, 歪, 応力が実際より小さく評価される問題について	15
7.4 物体が回転する問題はメッシュが膨張して非現実的な解を得る問題について	16
7.4.1 線形弾性体の回転の詳しい解析	16
8 数学的なトピック	17
8.1 解の一意性存在性	18
8.1.1 Kornの第二不等式	18
8.1.2 歪テンソルと変位の H^1 のノルムの等価性	19
9 参考にしたもの	19



1 線形弾性体

1.1 線形弾性体における歪

線形弾性体では線形歪 ϵ を次のように表す。

$$\epsilon = \frac{1}{2}(\nabla_X \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \nabla_X) \quad (1)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) \quad (2)$$

ここで \mathbf{u} は無変形状態からの変位である。

1.2 線形弾性体の構成式

等方な線形弾性体の応力 σ は線形な歪をもとにして次のように書ける。

$$\sigma = \lambda(\text{tr}\epsilon)\mathbf{I} + 2\mu\epsilon \quad (3)$$

但し、 λ 、 μ は *Rame* の定数である。これを成分で書くと次のとおり、

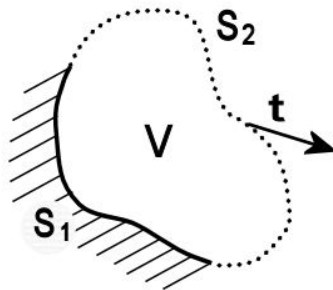
$$\sigma_{ij} = \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij} \quad (4)$$

また、 λ 、 μ はヤング率 E やポアソン比 ν と次のような関係がある。

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (5)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (6)$$

1.3 問題設定



S1 上では変位が固定されている。

$$u = \bar{u} \quad (\text{on } S1) \quad (7)$$

このような境界条件を固定境界条件、変位境界条件と呼ぶ。
S2 上では応力がかかっている。

$$\sigma^T \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} \quad (\text{on } S2) \quad (8)$$

このような境界条件を応力境界条件と呼ぶ。

1.4 弱形式化

線形弾性体では基本的に平衡方程式を変形して弱形式化を行うが、ここでは数々の近似を行う。大きな変形を取り扱う場合は元の平衡方程式を大きく変えてしまうのでずれてしまう。しかし、微小な変形ではその影響が少ない。

Cauchy の第一原理より

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_x = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \sigma \quad (9)$$

静的な釣り合い状態にある物体は加速度が 0 なので次の式を満たす

$$-\nabla \cdot \sigma = \rho \mathbf{g} \quad (10)$$

これを弱形式化するために、 S_1 上で 0 となる任意の関数 δu を両辺に掛け、変形前の領域 V で積分してみる。

$$-\int_V \delta u \cdot (\nabla \cdot \sigma) dV = \int_V \delta u \cdot \rho \mathbf{g} dV \quad (11)$$

左辺第一項の被積分関数について変形を行う

$$\delta u \cdot (\nabla \cdot \sigma) = \delta u_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \simeq \delta u_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_i} \quad (12)$$

$$= \frac{\partial}{\partial X_i} (\delta u_j \sigma_{ij}) - \frac{\partial \delta u_j}{\partial X_i} \sigma_{ij} \quad (13)$$

$$= \frac{\partial}{\partial X_i} (\delta u_j \sigma_{ij}) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} \right) \sigma_{ij} = \frac{\partial}{\partial X_i} (\delta u_j \sigma_{ij}) - \delta \epsilon_{ij} \sigma_{ij} \quad (14)$$

$$= \nabla \cdot (\sigma \cdot \delta \mathbf{u}) - \delta \epsilon : \sigma \quad (15)$$

これを代入すると

$$-\int_V \nabla \cdot (\sigma \cdot \delta \mathbf{u}) - \delta \epsilon : \sigma dV = \int_V \delta \mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{g} dV \quad (16)$$

左辺の被積分関数第1項を右辺に移動させて

$$\int_V \delta \epsilon : \sigma dV = \int_V \delta \mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{g} dV + \int_V \nabla \cdot (\sigma \cdot \delta \mathbf{u}) dV \quad (17)$$

ガウスの発散定理を右辺第2項に適用して、

$$\int_V \sigma : \delta \epsilon dV = \int_V \delta \mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{g} dV + \int_{\partial V} \mathbf{N} \cdot (\sigma \cdot \delta \mathbf{u}) dS \quad (18)$$

右辺第二項について変形を行う。

$$\int_{\partial V} \mathbf{N} \cdot (\sigma \cdot \delta \mathbf{u}) dS = \int_{S_2} \mathbf{N} \cdot (\sigma \cdot \delta \mathbf{u}) dS \quad (19)$$

$$\simeq \int_{S_2} \mathbf{n} \cdot (\sigma \cdot \delta \mathbf{u}) dS \quad (20)$$

$$= \int_{S_2} \delta \mathbf{u} \cdot \sigma^T \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_2} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} dS \quad (21)$$

これを代入すると最終的に弱形式化された問題は次のようになる。

— 弱形式化された支配方程式 —

$$\begin{cases} \int_V \sigma : \delta \epsilon dV = \int_V \rho \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} dV + \int_{S_2} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} dS & \{ \delta \mathbf{u} \mid \delta \mathbf{u} = 0 \text{ (on } S_1) \} \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} & \text{(on } S_1 \text{)} \end{cases} \quad (22)$$

1.5 変位を用いた表示への弱形式化された支配方程式の変形

上の式で弱形式化はできたわけであるが、変位を変数として解くので、上の弱形式の方程式を変位が入った式に変形しなければならない。

応力に線形弾性体の構成式を代入して、

$$\int_V (\lambda(\text{tr} \epsilon) \mathbf{I} + 2\mu \epsilon) : \delta \epsilon dV = \int_V \rho \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} dV + \int_{S_2} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} dS \quad (23)$$

$$\int_V \lambda(\text{tr} \epsilon)(\text{tr} \delta \epsilon) + 2\mu \epsilon : \delta \epsilon dV = \int_V \rho \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} dV + \int_{S_2} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} dS \quad (24)$$

i, j に総和規約を適応して成分で書くと次のようになる。

$$\int_V \lambda \epsilon_{jj} \delta \epsilon_{ii} + 2\mu \epsilon_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV = \int_V \rho \delta u_i g_i dV + \int_{S_2} \delta u_i t_i dS \quad (25)$$

$$\int_V \lambda \frac{\partial u_j}{\partial X_j} \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_i} + 2\mu \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial X_i} \right) dV = \int_V \rho \delta u_i g_i dV + \int_{S_2} \delta u_i t_i dS \quad (26)$$

左辺被積分関数中の第2項を展開して

$$\int_V \lambda \frac{\partial u_j}{\partial X_j} \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_i} + \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \frac{\partial \delta u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \frac{\partial \delta u_j}{\partial X_i} \right) dV = \int_V \rho \delta u_i g_i dV + \int_{S_2} \delta u_i t_i dS \quad (27)$$

δu の添え字が i に u の添え字が j になるように添え字を入れ替えると次のとおり

変位を元に弱形式化された支配方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_V \lambda \frac{\partial u_j}{\partial X_j} \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_i} + \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial X_k} \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_k} \delta_{ij} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} \right) dV = \int_V \rho \delta u_i g_i dV + \int_{S_2} \delta u_i t_i dS \\ \forall \delta \mathbf{u} \mid \delta \mathbf{u} = 0 \quad (\text{on } S_1) \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad (\text{on } S_1) \end{array} \right. \quad (28)$$

2 有限要素法離散化

2.1 積分領域分割

$$\int_V \lambda \frac{\partial u_j}{\partial X_j} \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_i} + \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial X_k} \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_k} \delta_{ij} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} \right) dV = \int_V \rho \delta u_i g_i dV + \int_{S_2} \delta u_i t_i dS \quad (29)$$

上式は積分で書かれている。積分とはつまり和であるので積分領域を分割してた中で積分を実行し、それを足し合わせて上式を計算してもよい。

そこで V を要素分割した領域を V_e 、 S_2 を要素分割した領域を S_{2e} とすると定式は次のように書ける。

$$\sum_e^{nV_e} \int_{V_e} \lambda \frac{\partial u_j}{\partial X_j} \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_i} + \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial X_k} \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_k} \delta_{ij} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} \right) dV = \sum_e^{nV_e} \int_{V_e} \rho \delta u_i g_i dV + \sum_e^{nS_{2e}} \int_{S_e} \delta u_i t_i dS \quad (30)$$

但し、 nV_e 、 nS_{2e} はそれぞれ V と S_{2e} の要素分割数である。

2.2 内挿関数の導入

V_e 内で関数 $u_j, \delta u_i$ は次のような形状関数 N によって離散化されているとする。但し、固定境界条件が設定されている面 S_1 上の節点 \bar{n} では $u_j^{\bar{n}} = g_1$ 、 $\delta u_i^{\bar{n}} = 0$ である。

$$u_j = N^n u_j^n \quad (31)$$

$$\delta u_i = N^m \delta u_i^m \quad (32)$$

同様に S_{2e} 内で関数 $\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}$ は次のような形状関数 \bar{N} によって離散化されているとする。

$$u_j = \bar{N}^n u_j^n \quad (33)$$

$$\delta u_i = \bar{N}^m \delta u_i^m \quad (34)$$

これを上式に代入すると次のようになる。

$$\begin{aligned} & \sum_e^{nV_e} \int_{V_e} \lambda \frac{\partial \mathbf{N}^n u_j^n}{\partial X_j} \frac{\partial \mathbf{N}^m \delta u_i^m}{\partial X_i} + \mu \frac{\partial \mathbf{N}^n u_j^n}{\partial X_k} \frac{\partial \mathbf{N}^m \delta u_i^m}{\partial X_k} \delta_{ij} + \mu \frac{\partial \mathbf{N}^n u_j^n}{\partial X_i} \frac{\partial \mathbf{N}^m \delta u_i^m}{\partial X_j} dV \quad (35) \\ & = \sum_e^{nV_e} \int_{V_e} \rho \mathbf{N}^m \delta u_i^m g_i dV + \sum_e^{nS_{2e}} \int_{S_e} \bar{\mathbf{N}}^m \delta u_i^m t_i dS \end{aligned}$$

ここで $u_j^n, \delta u_i^m$ は節点の値であり、関数ではないので積分の外に出すことができる。それぞれ積分の外に出した後にまとめると次のようになる。

$$\begin{aligned} & \delta u_i^m \left(\sum_e^{nV_e} \int_{V_e} \lambda \frac{\partial \mathbf{N}^n}{\partial X_j} \frac{\partial \mathbf{N}^m}{\partial X_i} + \mu \frac{\partial \mathbf{N}^n}{\partial X_k} \frac{\partial \mathbf{N}^m}{\partial X_k} \delta_{ij} + \mu \frac{\partial \mathbf{N}^n}{\partial X_i} \frac{\partial \mathbf{N}^m}{\partial X_j} dV \right) u_j^n \quad (36) \\ & = \delta u_i^m \left(\sum_e^{nV_e} \int_{V_e} \rho \mathbf{N}^m g_i dV + \sum_e^{nS_{2e}} \int_{S_e} \bar{\mathbf{N}}^m t_i dS \right) \end{aligned}$$

これは次のように行列表記できる。

$$\delta u_i^m \quad K_{i,j}^{m,n} \quad u_j^n = \delta u_i^m F_i^m \quad (37)$$

$$K_{i,j}^{m,n} = \sum_e^{nV_e} K_{e,i,j}^{a,b} \quad (38)$$

但し，要素内節点番号 (a,b) は全体節点番号 (m,n) に対応する。

線形弾性体の要素剛性行列

$$K_{e,i,j}^{a,b} = \int_{V_e} \lambda \frac{\partial \mathbf{N}^b}{\partial X_j} \frac{\partial \mathbf{N}^a}{\partial X_i} + \mu \frac{\partial \mathbf{N}^b}{\partial X_k} \frac{\partial \mathbf{N}^a}{\partial X_k} \delta_{ij} + \mu \frac{\partial \mathbf{N}^b}{\partial X_i} \frac{\partial \mathbf{N}^a}{\partial X_j} dV \quad (39)$$

$$F_i^m = \sum_e^{nV_e} \int_{V_e} \rho \mathbf{N}^m g_i dV + \sum_e^{nS_{2e}} \int_{S_e} \bar{\mathbf{N}}^m t_i dS \quad (40)$$

3 要素における離散化

3.1 アイソパラメトリック要素

アイソパラメトリック要素では積分点 α における被積分関数を計算し、それぞれヤコビアン J と重み ω_α をかけて、積分点ごとに足し合わせることで積分を行う。

$$K_{e,i,j}^{a,b} = \int_{V_e} \lambda \frac{\partial \mathbf{N}^b}{\partial X_j} \frac{\partial \mathbf{N}^a}{\partial X_i} + \mu \frac{\partial \mathbf{N}^b}{\partial X_k} \frac{\partial \mathbf{N}^a}{\partial X_k} \delta_{ij} + \mu \frac{\partial \mathbf{N}^b}{\partial X_i} \frac{\partial \mathbf{N}^a}{\partial X_j} dV \quad (41)$$

$$= \sum_\alpha \omega_\alpha \left(\lambda \frac{\partial \mathbf{N}^b}{\partial X_j} \frac{\partial \mathbf{N}^a}{\partial X_i} + \mu \frac{\partial \mathbf{N}^b}{\partial X_k} \frac{\partial \mathbf{N}^a}{\partial X_k} \delta_{ij} + \mu \frac{\partial \mathbf{N}^b}{\partial X_i} \frac{\partial \mathbf{N}^a}{\partial X_j} \right) J_\alpha \quad (42)$$

もちろん被積分関数は積分ごとに異なる値をとる。

積分点ごとに $\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{X}}$ を計算して、被積分関数を求めなければならない。

3.1.1 プログラミング例

積分ごとの値を足し合わせる部分のプログラムを参考までに載せておく。

記号の対応は以下のとおり

1. myu= μ 、lambda= λ 、rho= ρ 、g[i]= g_i
2. dndx[a][i]= $\frac{\partial N^a}{\partial X_i}$ 、an[a]= N^a 、detwei= $\omega_\alpha J_\alpha$
3. emat[a][b][i][j]= $K_{e,i,j}^{a,b}$


```

1 // 要素剛性行列を作る
2 for(unsigned int inoel=0;inoel<nnoel;inoel++){
3   for(unsigned int jnoel=0;jnoel<nnoel;jnoel++){
4     double dtmp1 = 0.0;
5     for(unsigned int idim=0;idim<ndim;idim++){
6       for(unsigned int jdim=0;jdim<ndim;jdim++){
7         emat[inoel][jnoel][idim][jdim]
8 += detwei*( lambda*dndx[inoel][idim]*dndx[jnoel][jdim]+myu*dndx[jnoel][idim]*dndx[inoel][jdim] );
9       }
10    dtmp1 += dndx[inoel][idim]*dndx[jnoel][idim];
11    }
12    for(unsigned int idim=0;idim<ndim;idim++){
13      emat[inoel][jnoel][idim][idim] += detwei*myu*dtmp1;
14    }
15  }
16 }
17 // 要素内外力を作る
18 for(unsigned int inoel=0;inoel<nnoel;inoel++){
19   for(unsigned int idim=0;idim<ndim;idim++){
20     eforce[inoel][idim] += g[idim]*rho*an[inoel]*detwei;
21   }
22 }

```

4 テンソルのベクトル表記

Cauchy 応力は Cauchy の第二原理から対称テンソルである。また線形歪も定義から明らかに対称テンソルである。つまり、

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (43)$$

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} \quad (44)$$

テンソルはベクトルからベクトルへの線形変換であったから、行列として成分表示できる。この時の成分の数は3次元なら9個である。

しかし、このような対称テンソルの場合は独立な成分の数は6つなので次のように独立な成分の数をベクトル的に並べると、圧縮して書くことができ何かと便利である。

$$\{\sigma\} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} \quad (45)$$

$$\{\epsilon\} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ 2\epsilon_{xy} \\ 2\epsilon_{xz} \\ 2\epsilon_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} \quad (46)$$

剪断歪の場合だけ歪が2倍して表記していることに注意していただきたい。このように ϵ の剪断部分を2倍した γ を使ってベクトル表記した歪を工学歪と呼ばれる。工学では専らこちらの歪が用いられる。

剪断歪の部分を2倍にした工学歪を使うと、通常は応力テンソルと歪テンソルのテンソル積で書かれる歪エネルギー密度 ρ_w を、ベクトルの内積で書くことができる。

$$\rho_w = \frac{1}{2}\sigma : \epsilon = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\{\sigma\} \cdot \{\epsilon\} \quad (47)$$

線形弾性体の応力-歪関係式は次のような関係であった。

$$\sigma_{ij} = \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij} \quad (48)$$

これを添え字を入れ替えて、 ϵ の添え字が k, l になるようにすると

$$\sigma_{ij} = \lambda\epsilon_{kl}\delta_{kl}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{kl}\delta_{ik}\delta_{jl} = (\lambda\delta_{kl}\delta_{ij} + 2\mu\delta_{ik}\delta_{jl})\epsilon_{kl} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (49)$$

ここで応力と歪を関係づける、4階のテンソル \mathbf{C} は構成則テンソルと呼ばれる。

これらを利用すると、応力、歪をテンソル表記からベクトル表記に変えた場合に応力-歪関係式は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu \\ & & & \mu \\ & & & & \mu \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} \quad (50)$$

5 2次元問題

5.1 平面歪

z方向の厚みが大きい場合などは、変位は2次元的であると考えられる。つまり、z方向の変位は小さいと考えられる。またx変位やy変位はz方向に対して一定となると考えられる。このような状態を平面歪状態と呼ぶ。

つまり、

$$u_z = 0, \frac{\partial u_x}{\partial X_z} = 0, \frac{\partial u_y}{\partial X_z} = 0 \quad (51)$$

が成り立つ。

これを用いると、

$$\epsilon_{zz} = 0, \gamma_{xz} = 0, \gamma_{yz} = 0 \quad (52)$$

であることがわかる。

これをもちいて歪エネルギー密度 ρ_w を計算する。

$$\rho_w = \frac{1}{2} \{\sigma\} \cdot \{\epsilon\} \quad (53)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} \quad (54)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & & & \\ & & & \mu & & \\ & & & & \mu & \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} \quad (55)$$

ここで、 $\epsilon_{zz} = 0$ 、 $\gamma_{xz} = 0$ 、 $\gamma_{yz} = 0$ をこの式に代入すると、

$$\rho_w = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 0 \\ \gamma_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & & & \\ & & & \mu & & \\ & & & & \mu & \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 0 \\ \gamma_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (56)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \\ & & \mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (57)$$

元の3次元の式と比べると、**Raméの定数**を変えずに単純に次元を3から2に減らせばいいことが分かる。

5.2 平面応力

z方向の厚みが十分小さい場合は、平面応力

$\sigma_{zz} = 0$ 、 $\tau_{xz} = 0$ 、 $\tau_{yz} = 0$ が成り立つ。

歪についての関係を求めるために、次の応力-歪関係式から歪を逆算しよう。

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ 0 \\ \tau_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & & & \\ & & & \mu & & \\ & & & & \mu & \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} \quad (58)$$

$\epsilon_{zz} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})$ 、 $\gamma_{xz} = 0$ 、 $\gamma_{yz} = 0$ となる。

e_{zz} を良く見ると負の符号がついていることにより、 e_{xx} 、 e_{yy} によって圧縮(膨張)されたらz方向に膨張(圧縮)されることがわかる。面内で圧縮されると厚み方向に膨らむことがわかる。

これを用いて、歪エネルギー密度 ρ_w を計算すると、

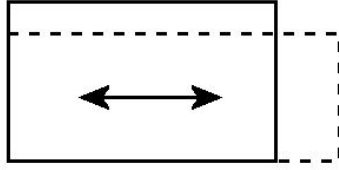


図 1: 2次元単純引っ張り

$$\begin{aligned}
 \rho_{\mathbf{w}} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \\ \gamma_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \\ \gamma_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda'+2\mu & \lambda' \\ \lambda' & \lambda'+2\mu \\ & \mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (60)
 \end{aligned}$$

となる。但し、 $\lambda' = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}$ である。

Ramé の定数のうち、 λ を見かけ上変化させた上で3次元から2次元化すればいいことがわかる。

6 簡単な2次元問題の計算例

簡単な形状をしていて、一様な歪を生じるような問題は解析的に解くことが可能である。このような単純な問題を解くことで解析プログラムが本当に正しいのか検証することができる。

6.1 2次元単純引っ張り問題

次の図のように矩形の物体を引っ張って変形させる。

x 方向に引っ張るとすると y 方向には力が働かないので y 方向の垂直応力は 0 となる。

$$\sigma_{yy} = 0 \quad (61)$$

6.1.1 平面歪問題

$$\sigma_{yy} = \lambda\epsilon_{xx} + (\lambda + 2\mu)\epsilon_{yy} + \lambda\epsilon_{zz} = \lambda\epsilon_{xx} + (\lambda + 2\mu)\epsilon_{yy} = 0 \quad (62)$$

より、

$$\epsilon_{yy} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\epsilon_{xx} \quad (63)$$

である。

$$\nu^* = -\frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{xx}} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} = \frac{\nu}{1 - \nu} \quad (64)$$

となる。

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{xx} + \lambda\epsilon_{yy} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{xx} + \lambda\left(-\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\right)\epsilon_{xx} = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}\epsilon_{xx}$$

これから、見かけ上のヤング率 E^* は

$$E^* = \frac{\sigma_{xx}}{\epsilon_{xx}} = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (65)$$

6.1.2 平面応力状態

平面応力状態では $\sigma_{zz} = 0$ であり、これは 3 次元の単純引っ張りとは一致する。よって

$$\nu^* = \nu, \quad E^* = E \quad (66)$$

である。

7 線形弾性体の解析をするときに注意すべき 4 つの点

線形弾性体の解析において注意することを 4 つほどあげると次のようになる。

1. ポアソン比が 0.5 に近づくと解の精度がおちる。

2. 曲げ問題は要素の種類によっては解の精度がわるい
3. 変形, 歪, 応力はは実際より小さく評価される。
4. 物体が回転する問題はメッシュが膨張して非現実的な解を得る。

以下それぞれの注意点について簡単に述べる。

7.1 ポアソン比が0.5に近づくと解の精度が落ちる問題について

ポアソン比が0.5に近づけると体積弾性率が無限に大きくなる。これは体積変化に対する反力が大きくなることを意味しており、体積変化がないという非圧縮性の拘束条件が次第に変位に付加される。

このような非圧縮の問題の場合、応力は変位から発生する応力の他に拘束力から発生する非決定応力が追加されるため、変位のみを変数として解析することができない。そこで圧力変数を導入してこの問題を解析する。変位変数と圧力変数を用いた弾性体の解析を u/p formulation という。圧力変数を導入するために圧力節点を追加するが、圧力節点と変位節点の要素内の配置の仕方に解析がうまくパターンがあるのでそれらを採用しなければならない。

7.2 曲げ問題は要素の種類によっては解の精度が悪い問題について

1次要素など補間関数の次数が低いときに梁など薄い構造物の曲げを解析するときに、実際よりも硬い解が得られる。これはメンブレンロッキングと呼ばれる現象で注意が必要である。

これも梁のような薄い構造物を曲げるときに面外剪断が0であるという Kirchhoff 条件が変位に付加させるために解の精度が悪くなるためである。

高次要素を用いたり、低減積分、選択的低減積分を用いることで精度を向上させることができる。またソリッド要素をやめて構造要素を用いるのも有効な手段の一つである。

2次元梁曲げ問題のロッキング問題については以下が詳しい。:有限要素法における2次元弾性体要素の精度に関する研究—<http://globe.nagaokaut.ac.jp/yoshisyu/2003/kensetu/pdf/ken04>

7.3 変形, 歪, 応力が実際より小さく評価される問題について

変分原理より解析解は最もポテンシャルエネルギーの低い解である。有限要素法で求める解はメッシュ上で表現できる関数に限定して、その中でもっともエネ

ルギーの小さな解である。よって有限要素法のエネルギーは解析解のエネルギーより常に大きい。これは大雑把に言えば、有限要素法の変形や歪や応力は解析解の変形よりも小さく評価されることを意味している。有限要素法による弾性体解析の一つの目的は構造部材が破壊するかどうかである。実際よりも破壊されにくいというように評価されてしまう。これは危険である。異なるメッシュサイズの解析を行って収束を見るなど、十分に注意しなければならない。

7.4 物体が回転する問題はメッシュが膨張して非現実的な解を得る問題について

線形弾性体の構成式は客観性をみだしていないので回転することは想定外である。線形弾性体を回転させた場合は膨張するような解が得られる。

下の図は線形弾性体の片持ち梁に下向きの重力をかけて曲げたものである。回転した部分が大きく膨張して非現実的な変形をしているのがわかる。

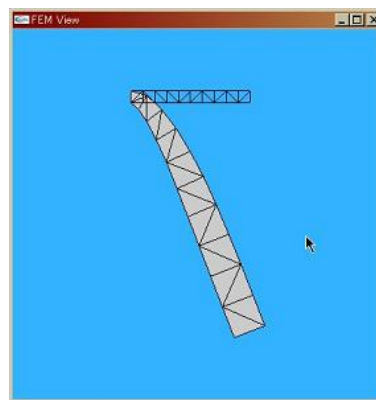


図 2: 線形弾性体を回転させた場合の膨張

そもそも線形弾性体は微小変形微小歪問題にのみ用いるべきである。微小歪問題で大変形（つまり回転）にも対応しているのが St.Venant-Kirchhoff 体である。

7.4.1 線形弾性体の回転の詳しい解析

2次元の線形弾性体を剛体回転させた場合どうなるのかを詳しく調べてみよう。点 (X, Y) を原点反時計周りに θ だけ剛体回転させた場合の座標 (x, y) は、
$$(x, y) = (X \cos \theta - Y \sin \theta, X \sin \theta + Y \cos \theta)$$

回転させる前の点からの変位 u_x, u_y は

$$(u_x, u_y) = (x - X, y - Y) = (X(\cos \theta - 1) - Y \sin \theta, X \sin \theta + Y(\cos \theta - 1))$$

よって線形歪は次のようになる。

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial X} = \cos \theta - 1 \quad (67)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial Y} = \cos \theta - 1 \quad (68)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial Y} + \frac{\partial u_y}{\partial X} = 0 \quad (69)$$

よって $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} < 0$ より等方圧縮の垂直歪が発生していることがわかる。垂直圧縮することで膨張させようとする応力が働く。梁の回転している部分には応力がかかっていないので、応力を 0 にするために結局、膨張した解を得ることになる。

8 数学的なトピック

ノルムを次のように定義する

$$\|\epsilon(v)\|_0^2 = \int_{\Omega} \epsilon(v) : \epsilon(v) d\Omega \quad (70)$$

$$\|v\|_0^2 = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} v_i^2 d\Omega \quad (71)$$

$$\|v\|_1^2 = \|v\|_0^2 + \sum_{i=1}^N \|\nabla v_i\|_0^2 \quad (72)$$

弱形式の線形弾性体は次のとおり

$$\int_{\Omega} A\epsilon(u) : e(\phi) d\Omega = \langle f, \phi \rangle_{H^{-1}, H^1(\Omega)^N} \quad \forall \phi \in H_1^1(\Omega)^N \quad (73)$$

ここで ϕ に u を代入して、 A の強圧性より

$$\alpha \|\epsilon(u)\|_0^2 \leq \int_{\Omega} A\epsilon(u) : \epsilon(u) d\Omega = \langle f, u \rangle_{H^{-1}, H^1(\Omega)^N} \leq \|f\|_{H^{-1}} \|u\|_1 \quad (74)$$

8.1 解の一意性存在性

Korn の第一不等式よりが成り立つ。

$$c\|v\|_1^2 \leq \|v\|_0^2 + \|\epsilon(v)\|_0^2 \quad \forall v \in H^1(\Omega)^N \quad (75)$$

8.1.1 Korn の第二不等式

Korn の第二不等式

$$c'\|v\|_1^2 \leq \|\epsilon(v)\|_0^2 \quad \forall v \in H_\Gamma^1(\Omega)^N \quad (76)$$

が成り立つことを背理法で示す。もし上が成り立たないとすると、

$\|v_n\|_1 = 1$ を満たしたまま

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\epsilon(v_n)\|_0 = 0$ とすような v_n が存在する。これを仮定して矛盾が起こることを示す。

Sovlev の埋蔵定理より H^1 空間は L^2 空間でコンパクトである。よって、

$$v_n \rightarrow v \text{ strongly in } L^2(\Omega)^N \quad (77)$$

となるような $v \in H_\Gamma^1(\Omega)^N$ が存在する。

ここで Korn の不等式より

$$c\|v_n - v_m\|_1^2 \leq \|v_n - v_m\|_0^2 + \|\epsilon(v_n - v_m)\|_0^2 \leq \|v_n - v_m\|_0^2 + \|\epsilon(v_n)\|_0^2 + \|\epsilon(v_m)\|_0^2 \quad (78)$$

n, m を大きくすれば右辺は好きなだけ小さくできる。よって v_n は $H^1(\Omega)^N$ 上の Cauchy 列である。よって v_n は v に $H^1(\Omega)^N$ で収束する。

$$\|\epsilon(v)\|_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\epsilon(v_n)\|_0 = 0 \quad (79)$$

であるから $\epsilon(v) = 0$ である。

v は境界 Γ 上で 0 であるから、 $v = 0$ である。

これは $\|v_n\|_1 = 1$ に反する。よって題意は示された。

8.1.2 歪テンソルと変位の H^1 のノルムの等価性

逆の不等式が自明であるので $\|\phi\|_1$ と $\|\epsilon(\phi)\|_0$ は等価なノルムであるといえる。
つまり、次のように、作用素の H^1 における楕円性がいえる。

$$\alpha\|u\|_1^2 \leq \int_{\Omega} A\epsilon(u) : \epsilon(u) d\Omega \leq C\|u\|_1^2 \quad (80)$$

このことから、Lax-Milgram の定理より解 $u \in H_1^1(\Omega)^N$ が唯一に存在することがいえる。

9 参考にしたもの

[1],[2],[3],[4],[5],[6]

参考文献

- [1] Braess, D.: *Finite Elements: Theory, Fast Solvers, and Applications in Solid Mechanics*, Cambridge University Press, 3 edition (2007).
- [2] W. フリュージェ: テンソル解析と連続体力学 (1979年) (理工学海外名著シリーズ〈30〉), ブレイン図書出版 (1979).
- [3] 渡辺浩志: 非線形有限要素法特論, <http://www.sml.k.u-tokyo.ac.jp/members/nabe/>.
- [4] 久田俊明: 非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎, 丸善 (1999).
- [5] 中谷彰宏: 固体力学の達人 (基礎編), http://www.md.ams.eng.osaka-u.ac.jp/~nakatani/Lectures/Fundamentals_of_Solid_Mechanics/TEXT/HTML/.
- [6] P. チャドウィック: 連続体力学 - 簡明な理論と例題 (1979年) (理工学海外名著シリーズ〈31〉), ブレイン図書出版 (1979).