

超弾性体の有限要素法解析*

梅谷 信行

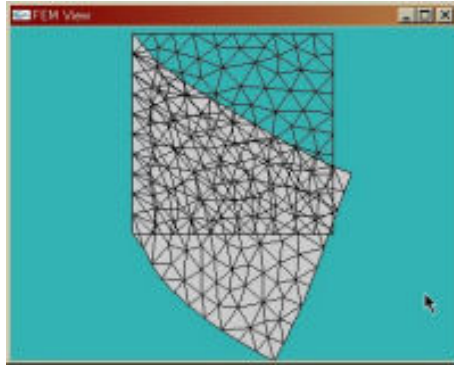
平成 22 年 7 月 12 日

目次

1	歪エネルギーポテンシャル	3
1.1	実等方テンソル関数	3
1.1.1	表示定理	3
1.1.2	表示定理の証明	4
1.2	共役な歪と応力	5
1.2.1	応力のなす仕事	5
1.2.2	応力パワー	6
1.3	歪エネルギーポテンシャル	6
2	非圧縮性超弾性体	9
2.1	非圧縮性の内部拘束	9
2.2	Lagrange 未定乗数を導入したポテンシャル関数	9
2.3	平衡方程式の離散化	10
2.4	内力ベクトル	11
2.4.1	変位の内力ベクトル	11
2.4.2	圧力の内力ベクトル	12
2.5	接線剛性行列	13
2.5.1	要素接線剛性行列 (変位-変位)	14
2.5.2	圧力構成則テンソル	15
2.5.3	接線剛性行列 (圧力-変位)	16

*これは忘れっぽい著者が昔勉強したことを書き留めておく備忘録です。きっと間違いを多く含んでいます。すみません。ご指摘ご意見などありましたら教えてもらえると有り難いです。

2.5.4	接線剛性行列 (変位-圧力)	17
2.5.5	接線剛性行列 (圧力-圧力)	17
3	様々な非圧縮性超弾性体	18
3.1	Neo-Hooke 体	18
3.2	Mooney-Rivlin 体	19
4	非圧縮性超弾性体への低減主不変量の導入	19
4.1	エネルギーポテンシャル関数の補正	19
4.1.1	低減不変量	20
4.2	低減不変量を考慮した超弾性体の応力	21
4.3	構成則テンソル	21
4.4	低減不変量の微分	21
4.5	低減不変量を使った Mooney-Rivlin 体	23



1 歪エネルギーポテンシャル

超弾性体は弾性エネルギーポテンシャルが存在するような物質である。ここでは弾性ポテンシャルが、右 Cauchy-Green 変形テンソルの主不変量で表されることをここでは示す。

1.1 実等方テンソル関数

次のような 3 階の対称テンソルから実数への関数 ψ は

$$\psi : \mathcal{S}^3 \rightarrow \mathcal{R} \quad (1)$$

次のような場合、実等方テンソル関数 (real isotropic tensor functions) と呼ばれる

$$\psi(\mathbf{C}) = \psi(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T) \quad \forall \mathbf{C} \in \mathcal{S}^3, \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathcal{O}_+^3 \quad (2)$$

ただし、 \mathcal{O}_+^3 は行列式が 1 の直交テンソルである。

1.1.1 表示定理

実等方テンソル関数 ψ は次のように表示することができる。

$$\psi(\mathbf{C}) = \psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \psi(\lambda_3, \lambda_1, \lambda_2) = \psi(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_1) \quad (3)$$

ここで、 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は \mathbf{C} の固有値または、

$$\psi(\mathbf{C}) = \psi(I_C, II_C, III_C) \quad (4)$$

ここで I_C, II_C, III_C は \mathbf{C} の主不変量

1.1.2 表示定理の証明

C の固有値を λ_i 対応する固有ベクトルを \mathbf{u}_i とする、 C は対称であったので C の固有ベクトルは直交する。ここでは $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ を右手系の正規直交基底となるように番号を選ぶ。さて、固有値、固有ベクトルを用いると、

$$C = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3 \otimes \mathbf{u}_3 \quad (5)$$

のように分解できる。 Q は任意なので、ここで次のように $Q \in O_+^3$ を選ぶ

$$Q = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{u}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{u}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{u}_3 \quad (6)$$

すると次のようになる。

$$QCQ^T = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \quad (7)$$

つまり C を固有値ベクトルによらない量に変換することができる。

$$\psi(C) = \psi(QCQ^T) = \psi(\lambda_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) = \psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (8)$$

となり固有値のみで表されることがわかる。ここで Q としては次の2つのようにもとれる。

$$Q = \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{u}_1 + \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{u}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{u}_3 \quad (9)$$

$$Q = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{u}_1 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{u}_2 + \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{u}_3 \quad (10)$$

それぞれ ψ を計算すると

$$\psi(C) = \psi(\lambda_3 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \lambda_1 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \lambda_2 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) = \psi(\lambda_3, \lambda_1, \lambda_2) \quad (11)$$

$$= \psi(\lambda_2 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \lambda_3 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \lambda_1 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) = \psi(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_1) \quad (12)$$

つまり、次のような順番の入れ替えが成り立つことがわかる。

$$\psi = \psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \psi(\lambda_3, \lambda_1, \lambda_2) = \psi(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_1) \quad (13)$$

さて、主不変量と固有値には次のような関係があった。

$$I_C = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad (14)$$

$$II_C = \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2 \quad (15)$$

$$III_C = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \quad (16)$$

これを用いると

$$f(\lambda) = \lambda^3 - I_C\lambda^2 + II_C\lambda - III_C = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \quad (17)$$

となる。よって $f(\lambda) = 0$ の解は $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 、つまり、主不変量が分かれば、固有値の組は分かる。よって次のように表すことができる。

$$\psi(C) = \psi(I_C, II_C, III_C) \quad (18)$$

1.2 共役な歪と応力

1.2.1 応力のなす仕事

Cauchy の第一運動則より

$$\nabla \cdot T = \rho(\mathbf{a} - \mathbf{g}) \quad (19)$$

が常に成り立つ。ここで T は Cauchy 応力テンソル両辺に \mathbf{v} を内積して、任意の物質上の領域 v で積分すると次のとおり

$$\int_v (\nabla \cdot T) \cdot \mathbf{v} dv = \int_v \rho \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} dv - \int_v \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dv \quad (20)$$

$$\int_v \nabla \cdot (T \cdot \mathbf{v}) - T : (\mathbf{v} \otimes \nabla) dv = \int_v \rho \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} dv - \int_v \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dv \quad (21)$$

$$\int_s \mathbf{n} \cdot (T \cdot \mathbf{v}) ds - \int_v \mathbf{T} : \mathbf{L} dv = \left(\int_v \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dv \right)' - \int_v \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dv \quad (22)$$

$$\left(\int_v \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dv \right)' + \int_v \mathbf{T} : \mathbf{D} dv = \int_s \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} ds + \int_v \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dv \quad (23)$$

L は速度勾配テンソル、 D は変形速度テンソルである。これをまとめると次のとおり、

$$K' + P_{in} = P_{out} \quad (24)$$

但し、

$$P_{out} = \int_s \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} ds + \int_v \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dv \quad (25)$$

ここで K は運動エネルギーを表し、 P_{out} は表面力と体積力によってなされる単位時間当たりの仕事を表している。 P_{in} は応力によってなされる仕事であり、物体が単位時間あたりに吸収するエネルギーである。このエネルギーは歪ポテンシャルとして蓄えられたり、熱エネルギーに変化する。上式はエネルギーの保存則であり、外力によってなされる仕事率 P_{in} が運動エネルギーの変化率 K と応力によってなされる仕事率 P_{out} に等しいことを表している。ここで、 $T : D$ は単位時間あたりに現配置の単位体積あたりに応力がなす仕事であり、応力パワー (stress power) と呼ばれる。

1.2.2 応力パワー

応力が現配置での単位体積あたりの物体内部になす仕事率は $T : D$ のように書けることがわかった。さて時刻ゼロのの基準配置での単位体積あたりの仕事率 ρ_w はヤコビアン J を使って次のとおり

$$\rho_w = \mathbf{J} \mathbf{T} : \mathbf{D} = \mathbf{J} \mathbf{T} : \mathbf{L} \quad (26)$$

である。これをさらに変形して、基準配置での応力と歪を用いてこれを書こう。

$$\rho_w = J \left(\frac{1}{J} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T \right) : (\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}) = \text{tr}(\mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{F}}^T) = \text{tr}(\mathbf{S} \dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F}) = \mathbf{S} : (\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^T) \quad (27)$$

$$= \mathbf{S} : \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^T + \dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F}) = \mathbf{S} : \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} \right) = \mathbf{S} : \left(\frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} - \mathbf{I}) \right) = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} \quad (28)$$

1.3 歪エネルギーポテンシャル

超弾性体 (hyper elastic material) とは次のような関係が成り立つ弾性ポテンシャル関数 W が存在するような物質である。

超弾性体の歪-応力関係式

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} \quad (29)$$

応力が変形履歴によらないということがわかる。また、この式が成り立つとき、

$$\rho_W = S : \dot{E} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} \frac{\partial E_{ij}}{\partial t} = \dot{W} \quad (30)$$

が成り立つので、応力がなす仕事が全て物体内部にポテンシャルエネルギーとして保存されることがわかる。歪エネルギーポテンシャルは客観性をもったスカラー量である。つまり、等方テンソル関数としての性質を持つ。上を用いると次のように主不変量のみで書くことができる。

$$W(\mathbf{C}) = W(I_C, II_C, III_C) \quad (31)$$

$$S_{ij} = 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_C} \frac{\partial I_C}{\partial C_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial II_C} \frac{\partial II_C}{\partial C_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial III_C} \frac{\partial III_C}{\partial C_{ij}} \right) \quad (32)$$

$$\frac{\partial I_C}{\partial C_{ij}} = \frac{\partial C_{kk}}{\partial C_{ij}} = \delta_{ij} \quad (33)$$

$$\frac{\partial II_C}{\partial C_{ij}} = I_C \delta_{ij} - C_{ij} \quad (34)$$

$$\frac{\partial III_C}{\partial C_{ij}} = II_C \delta_{ij} - I_C C_{ij} + C_{ik} C_{kj} = III_C (\mathbf{C}^{-1})_{ij} \quad (35)$$

$$II_C = \frac{1}{2} \{ (\text{tr} \mathbf{C})^2 - (\text{tr} \mathbf{C}^2) \} \quad (36)$$

これを成分で書くと

$$II_C = \frac{1}{2} \{ C_{kk} C_{ll} - C_{kl} C_{lk} \} \quad (37)$$

両辺 C_{ij} で微分すると、

$$\frac{\partial II_C}{\partial C_{ij}} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial C_{kk}}{\partial C_{ij}} C_{ll} + C_{kk} \frac{\partial C_{ll}}{\partial C_{ij}} - \frac{\partial C_{kl}}{\partial C_{ij}} C_{lk} - C_{kl} \frac{\partial C_{lk}}{\partial C_{ij}} \right\} \quad (38)$$

$$= \delta_{ij} C_{kk} - \frac{1}{2} \{ \delta_{ki} \delta_{lj} C_{lk} + C_{kl} \delta_{li} \delta_{kj} \} \quad (39)$$

$$= \delta_{ij} I_C - C_{ij} \quad (40)$$

Cayley-Hamilton の定理より

$$\mathbf{C}^3 - I_C \mathbf{C}^2 + II_C \mathbf{C} - III_C \mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (41)$$

両辺の trace を取って

$$3III_C = \text{tr}(\mathbf{C}^3 - I_C \mathbf{C}^2 + II_C \mathbf{C}) \quad (42)$$

成分表示をすると

$$3III_C = C_{ke} C_{ef} C_{fk} - I_C C_{ke} C_{ek} + II_C C_{kk} = 0 \quad (43)$$

両辺を C_{ij} で微分すると、

$$3 \frac{\partial III_C}{\partial C_{ij}} = \left(\delta_{ki} \delta_{ej} C_{ef} C_{fk} + C_{ke} \delta_{ei} \delta_{fj} C_{fk} + C_{ke} C_{ef} \delta_{fi} \delta_{kj} \right) \quad (44)$$

$$- \left(\frac{\partial I_C}{\partial C_{ij}} C_{ke} C_{ek} + I_C \delta_{ki} \delta_{ej} C_{ek} + I_C C_{ke} \delta_{ei} \delta_{kj} \right) \quad (45)$$

$$+ \left(\frac{\partial II_C}{\partial C_{ij}} C_{kk} + II_C \delta_{ki} \delta_{kj} \right) \quad (46)$$

$$= 3C_{ik} C_{kj} - 3I_C C_{ij} + 3II_C \delta_{ij} \quad (47)$$

$$\frac{\partial III_C}{\partial C_{ij}} = C_{ik} C_{kj} - I_C C_{ij} + II_C \delta_{ij} \quad (48)$$

$$\frac{\partial III_C}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial III_C}{\partial C_{ij}} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (49)$$

$$= \mathbf{C}^2 - I_C \mathbf{C} + II_C \mathbf{I} \quad (50)$$

$$= \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{C}^3 - I_C \mathbf{C}^2 + II_C \mathbf{C}) \quad (51)$$

$$= \mathbf{C}^{-1} (III_C \mathbf{I}) \quad (52)$$

$$= III_C \mathbf{C}^{-1} \quad (53)$$

$$\frac{\partial III_C}{\partial C_{ij}} = III_C (\mathbf{C}^{-1})_{ij} \quad (54)$$

歪エネルギーポテンシャルの主不変量での微分を用いて書かれた歪-応力関係式

$$S_{ij} = 2 \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial I_C} + \frac{\partial W}{\partial II_C} I_C \right) \delta_{ij} - \frac{\partial W}{\partial II_C} C_{ij} + \frac{\partial W}{\partial III_C} III_C (\mathbf{C}^{-1})_{ij} \right\} \quad (55)$$

2 非圧縮性超弾性体

ゴムのような物質を表す。

2.1 非圧縮性の内部拘束

$$\rho(t) = \rho_0 \quad \leftrightarrow \quad J = 1 \quad \leftrightarrow \quad \det(\mathbf{C}) = 1 \quad (56)$$

よって \mathbf{C} は次のような関数 γ_C の kernel をとる。

$$\gamma_C(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{C}) - 1 \quad (57)$$

拘束力は仕事をしないということから

$$\nabla \gamma_C(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{C}) \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^{-1} \quad (58)$$

拘束力 S_R は次のように書ける

$$S_R = -\lambda \mathbf{C}^{-1} \quad (59)$$

非圧縮性超弾性体の応力

$$S_{ij} = -\lambda (\mathbf{C}^{-1})_{ij} + 2 \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial I_C} + \frac{\partial W}{\partial III_C} I_C \right) \delta_{ij} - \frac{\partial W}{\partial III_C} C_{ij} + \frac{\partial W}{\partial III_C} III_C (\mathbf{C}^{-1})_{ij} \right\} \quad (60)$$

2.2 Lagrange 未定乗数を導入したポテンシャル関数

非圧縮の拘束条件を満たすとき 0 の値をとるような Ψ $\Psi(1) = 0$ かつ $\Psi'(1) = 1$ とする。 Ψ としては通常、線形関数 $\Psi(x) = x - 1$ や自然対数: $\Psi(x) = \ln(x)$ がよく使われる。これを用いると、Lagrange 未定乗数を導入した歪エネルギー密度は次のように書ける

$$W' = W + \lambda \Psi(III_C) \quad (61)$$

歪エネルギーの総和 Φ' は次のとおり

$$\Phi' = \int_V W + \lambda \Psi(III_C) dV \quad (62)$$

歪エネルギー密度 W' は Cauchy-Green 変形テンソル C と Lagrange 未定乗数の関数である。ここで Cauchy-Green 変形テンソル C は変位の関数であるから、 W' は変位と未定乗数の関数であるといえる。さて、外力も含めてこれが極値をとることから

Lagrange 未定乗数を含む仮想仕事式

$$\delta\Phi' = \frac{\partial\Phi'}{\partial\mathbf{u}}\delta\mathbf{u} + \frac{\partial\Phi'}{\partial\lambda}\delta\lambda = \int_{S_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta\mathbf{u}dS + \int_V \rho_0\mathbf{g} \cdot \delta\mathbf{u}dV \quad \forall\delta\mathbf{u}, \quad \forall\delta\lambda \quad (63)$$

を弱形式の解は満たす。

2.3 平衡方程式の離散化

変位場、未定乗数がそれぞれ離散的な値 u_i^a 、 λ^c で表されているとする。仮想仕事式の左辺は次のようにかける

$$\delta\Phi' = \frac{\partial\Phi'}{\partial u_i^a}\delta u_i^a + \frac{\partial\Phi'}{\partial \lambda^c}\delta \lambda^c = \{\mathbf{Q}\} \cdot \{\delta\mathbf{u}\} \quad (64)$$

但し、 $\{\mathbf{Q}\}$ は次のような節点等価内力ベクトルである。 $\{\delta\mathbf{u}\}$ も以下のとおり

$$\{\mathbf{Q}\} = \begin{pmatrix} \{Q^U\}_i^a \\ \{Q^P\}^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi'}{\partial u_i^a} \\ \frac{\partial\Phi'}{\partial \lambda^c} \end{pmatrix} \quad \{\delta\mathbf{u}\} = \begin{pmatrix} \delta u_i^a \\ \delta \lambda^c \end{pmatrix} \quad (65)$$

仮想仕事式の右辺が次のように表されるとする。

$$\{F^U\}_i^a \delta u_i^a = \int_{S_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta\mathbf{u}dS + \int_V \rho_0\mathbf{g} \cdot \delta\mathbf{u}dV \quad (66)$$

すると仮想仕事式は次のように離散的に表される。

$$\{\delta\mathbf{u}\}\{\mathbf{Q}\} = \{\delta\mathbf{u}\}\{\mathbf{F}\} \quad \forall\{\delta\mathbf{u}\} \quad (67)$$

但し、 $\{\mathbf{F}\} = \begin{pmatrix} \{F^U\}_i^a \\ 0 \end{pmatrix}$ である。任意の $\{\delta\mathbf{u}\}$ についてこれが成り立つことから

$$\{\mathbf{Q}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (68)$$

が成り立つ。これを解いて解を求める。

2.4 内力ベクトル

ここで要素 V_e 内で u が補間関数 \mathbf{N} を用いて、 λ が補間関数 \mathbf{M} を用いて次のように補間されているとする

$$u_i = N^p u_i^p, \quad \lambda = M^r \lambda^r \quad (69)$$

また要素内での変位節点 p は全体節点 a であるとし、要素内での圧力節点 λ は全体節点 c であるとする。

2.4.1 変位の内力ベクトル

さてここでは具体的に節点等価内力ベクトルの値を求めてみる。変位の内力ベクトルは次のようにして求められる。

$$\{Q^U\}_i^a = \frac{\partial \Phi'}{\partial u_i^a} \quad (70)$$

$$= \frac{\partial}{\partial u_i^a} \int_V (W + \lambda \Psi) dV \quad (71)$$

$$= \frac{\partial}{\partial u_i^a} \sum_e \int_{V_e} (W + \lambda \Psi) dV \quad (72)$$

$$= \sum_e \frac{\partial}{\partial u_i^p} \int_{V_e} (W + \lambda \Psi) dV \quad (73)$$

$$= \sum_e \int_{V_e} \left(\frac{\partial W}{\partial C_{gh}} + \lambda \frac{\partial \Psi}{\partial C_{gh}} \right) \frac{\partial C_{gh}}{\partial u_i^p} dV \quad (74)$$

$$= \sum_e \int_{V_e} 2 \left(\frac{\partial W}{\partial C_{gh}} + \lambda \frac{\partial \Psi}{\partial C_{gh}} \right) \frac{\partial E_{gh}}{\partial u_i^p} dV = \sum_e \int_{V_e} S_{gh} [B_{gh}]_i^p dV \quad (75)$$

$$= \sum_e \{Q_e^U\}_i^p \quad (76)$$

但し、

$$\{Q_e^U\}_i^p = \int_{V_e} S_{gh} [B_{gh}]_i^p dV \quad (77)$$

Green-Lagrange 歪の節点変位での微分は Total Lagrange 法を参考にさせていただきたい。このページによると、

$$[B_{gh}]_i^p = \frac{\partial N^p}{\partial X_h} F_{ig} \quad (78)$$

である。 S_{ij} は第二 Piola-Kirihoff 応力で次のとおり

$$S_{ij} = 2 \left\{ \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial \Psi}{\partial C_{ij}} \right\} \quad (79)$$

$$= 2 \left\{ \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \lambda \Psi'(III_C) \frac{\partial III_C}{\partial C_{ij}} \right\} \quad (80)$$

$$= 2 \left\{ \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \lambda \Psi'(III_C) III_C (\mathbf{C}^{-1})_{ij} \right\} \quad (81)$$

ここで、 S は非圧縮の拘束力 S^P と物性によって決まる応力 S^U を分けてられる。

$$S = S^U + S^P \quad (82)$$

$$S_{ij}^U = 2 \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} \quad (83)$$

$$S_{ij}^P = 2\lambda \Psi'(III_C) III_C (\mathbf{C}^{-1})_{ij} \quad (84)$$

2.4.2 圧力の内力ベクトル

一方、圧力の内力ベクトルは次のとおり

$$\{Q^P\}^c = \frac{\partial \Phi'}{\partial \lambda^c} \quad (85)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \lambda^c} \int_V (W + \lambda \Psi) dV \quad (86)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \lambda^c} \sum_e \int_{V_e} (W + \lambda \Psi) dV \quad (87)$$

$$= \sum_e \frac{\partial}{\partial \lambda^r} \int_{V_e} (W + M^r \lambda^r \Psi) dV \quad (88)$$

$$= \sum_e \int_{V_e} M^r \Psi dV = \sum_e \{Q_e^P\}^r \quad (89)$$

但し、

$$\{Q_e^P\}^r = \int_{V_e} M^r \Psi dV \quad (90)$$

— 非圧縮超弾性体の内力ベクトル —

$$\{Q\} = \sum_e \{Q_e\} \quad (91)$$

$$\{Q_e\} = \begin{pmatrix} \{Q_e^U\}_i^a \\ \{Q_e^P\}_i^c \end{pmatrix} \quad (92)$$

$$[B_{gh}]_i^p = \frac{\partial N^p}{\partial X_h} F_{ig} \quad (93)$$

$$\{Q_e^P\}^r = \int_{V_e} M^r \Psi dV \quad (94)$$

$$S = S^U + S^P \quad (95)$$

$$S_{ij}^U = 2 \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial I_C} + \frac{\partial W}{\partial III_C} I_C \right) \delta_{ij} - \frac{\partial W}{\partial III_C} C_{ij} + \frac{\partial W}{\partial III_C} (C^{-1})_{ij} \right\} \quad (96)$$

$$S_{ij}^P = 2\lambda \Psi'(III_C) III_C (C^{-1})_{ij} \quad (97)$$

2.5 接線剛性行列

また、 $\{Q\}$ は非線形だから解を求めるためには、増分法を用いて反復的に解に近づけていく方法を用いる。ここでは Newton-Raphson 法を用いた接線剛性行列について説明する。接線剛性行列は次のとおり

$$[K] = \begin{bmatrix} [K^{UU}]_{ij}^{ab} & [K^{UP}]_i^{ad} \\ [K^{PU}]_{cb}^j & [K^{PP}]^{cd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \{Q^U\}_i^a}{\partial u_j^b} & \frac{\partial \{Q^U\}_i^a}{\partial \lambda^d} \\ \frac{\partial \{Q^P\}_i^c}{\partial u_j^b} & \frac{\partial \{Q^P\}_i^c}{\partial \lambda^d} \end{bmatrix} \quad (98)$$

これは次のような要素剛性行列を足し合わせたものである。

$$[K] = \sum_e [K_e] \quad (99)$$

但し、

$$[K_e] = \begin{bmatrix} [K_e^{UU}]_{ij}^{pq} & [K_e^{UP}]_i^{ps} \\ [K_e^{PU}]_{j}^{rq} & [K_e^{PP}]_{rs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\{Q^U\}_i^p}{\partial u_j^q} & \frac{\partial\{Q^U\}_i^p}{\partial \lambda^s} \\ \frac{\partial\{Q^P\}_r}{\partial u_j^q} & \frac{\partial\{Q^P\}_r}{\partial \lambda^s} \end{bmatrix} \quad (100)$$

以下では具体的に要素剛性行列の成分を求める。

2.5.1 要素接線剛性行列 (変位-変位)

$$[K_e^{UU}]_{ij}^{pq} = \frac{\partial\{Q^U\}_i^p}{\partial u_j^q} \quad (101)$$

$$= \int_{V_e} \frac{\partial}{\partial u_j^q} \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial C_{gh}} + \lambda \frac{\partial \Psi}{\partial C_{gh}} \right) \frac{\partial C_{gh}}{\partial u_i^p} \right\} dV \quad (102)$$

$$= \int_{V_e} \left(\frac{\partial W}{\partial C_{gh} \partial C_{ef}} + \lambda \frac{\partial \Psi}{\partial C_{gh} \partial C_{ef}} \right) \frac{\partial C_{ef}}{\partial u_j^q} \frac{\partial C_{gh}}{\partial u_i^p} + \left(\frac{\partial W}{\partial C_{gh}} + \lambda \frac{\partial \Psi}{\partial C_{gh}} \right) \frac{\partial C_{gh}}{\partial u_i^p \partial u_j^q} \quad (103)$$

$$= \int_{V_e} C_{ghef} \frac{\partial E_{ef}}{\partial u_j^q} \frac{\partial E_{gh}}{\partial u_i^p} + S_{gh} \frac{\partial E_{gh}}{\partial u_i^p \partial u_j^q} dV \quad (104)$$

$$= \int_{V_e} \bar{C}_{ghef} [B_{ef}]_j^q [B_{gh}]_i^p + S_{gh} \frac{\partial N_p}{\partial X_g} \frac{\partial N_q}{\partial X_h} \delta_{ij} dV \quad (105)$$

Green-Lagrange 歪の節点変位での微分は [[Total Lagrange 法, Total Lagrange]] を参考にさせていただきたい。上式の積分内第一項が初期剛性行列、第 2 項が初期応力行列に対応する。但し、

$$C_{ghef} = 4 \left(\frac{\partial W}{\partial C_{gh} \partial C_{ef}} + \lambda \frac{\partial \Psi}{\partial C_{gh} \partial C_{ef}} \right) \quad (106)$$

$$\bar{C}_{ghef} = \frac{1}{2} (C_{ghef} + C_{ghfe}) \quad (107)$$

である。ここで歪速度-応力速度関係テンソル C を次のように、歪ポテンシャル由来のもの C^U と、非圧縮の拘束条件由来のもの C^P にわけると、

$$C_{ghef}^U = 4 \frac{\partial W}{\partial C_{gh} \partial C_{ef}}, \quad C_{ghef}^P = 4\lambda \frac{\partial \Psi}{\partial C_{gh} \partial C_{ef}} \quad (108)$$

$$\bar{C}_{ghef}^U = \frac{1}{2} (C_{ghef}^U + C_{ghfe}^U) \quad \bar{C}_{ghef}^P = \frac{1}{2} (C_{ghef}^P + C_{ghfe}^P) \quad (109)$$

これを用いると

$$\bar{C}_{ghcf} = \bar{C}_{ghcf}^U + \bar{C}_{ghcf}^P \quad (110)$$

のようになる。 \bar{C}^U は物質各々の構成式によって決まる。

2.5.2 圧力構成則テンソル

\bar{C}^P について求めてみよう。

$$\frac{\partial \Psi}{\partial C_{gh} \partial C_{ef}} = \frac{\partial}{\partial C_{ef}} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial C_{gh}} \right) \quad (111)$$

$$= \frac{\partial}{\partial C_{ef}} \left(\Psi'(III_C) \frac{\partial III_C}{\partial C_{gh}} \right) \quad (112)$$

$$= \Psi''(III_C) \frac{\partial III_C}{\partial C_{ef}} \frac{\partial III_C}{\partial C_{gh}} + \Psi'(III_C) \frac{\partial III_C}{\partial C_{ef} \partial C_{gh}} \quad (113)$$

$$= \Psi''(III_C) III_C^2 (C^{-1})_{ef} (C^{-1})_{gh} + \Psi'(III_C) \frac{\partial III_C}{\partial C_{ef} \partial C_{gh}} \quad (114)$$

右辺第二項で出てくる、第三不変量の2回微分については次のように計算される

$$\frac{\partial III_C}{\partial C_{ef} \partial C_{gh}} = \frac{\partial}{\partial C_{ef}} \left(\frac{\partial III_C}{\partial C_{gh}} \right) \quad (115)$$

$$= \frac{\partial}{\partial C_{ef}} \left(III_C (C^{-1})_{gh} \right) \quad (116)$$

$$= \frac{\partial III_C}{\partial C_{ef}} (C^{-1})_{gh} + III_C \frac{\partial (C^{-1})_{gh}}{\partial C_{ef}} \quad (117)$$

$$= III_C (C^{-1})_{ef} (C^{-1})_{gh} + III_C \frac{\partial (C^{-1})_{gh}}{\partial C_{ef}} \quad (118)$$

右辺第二項で出てくる、逆行列の微分を計算してみよう。 $C^{-1}C = I$ より、 $(C^{-1})_{ij}C_{jg} = \delta_{ig}$ である。両辺を C_{kl} で微分して、

$$\frac{\partial (C^{-1})_{ij}C_{jg}}{\partial C_{kl}} = \frac{\partial \delta_{ig}}{\partial C_{kl}} = 0 \quad (119)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial (C^{-1})_{ij}}{\partial C_{kl}} C_{jg} + (C^{-1})_{ij} \frac{\partial C_{jg}}{\partial C_{kl}} = 0 \quad (120)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial(C^{-1})_{ij}}{\partial C_{kl}} C_{jg} = -(C^{-1})_{ij} \delta_{jk} \delta_{gl} \quad (121)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial(C^{-1})_{ij}}{\partial C_{kl}} C_{jg} (C^{-1})_{gh} = -(C^{-1})_{ik} \delta_{gl} (C^{-1})_{gh} \quad (122)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial(C^{-1})_{ij}}{\partial C_{kl}} \delta_{jh} = -(C^{-1})_{ik} (C^{-1})_{lh} \quad (123)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial(C^{-1})_{ih}}{\partial C_{kl}} = -(C^{-1})_{ik} (C^{-1})_{lh} \quad (124)$$

— 逆行列の微分 —

$$\frac{\partial(C^{-1})_{ij}}{\partial C_{kl}} = -(C^{-1})_{ik} (C^{-1})_{lj} \quad (125)$$

これを代入すると、

$$\frac{\partial III_C}{\partial C_{ef} \partial C_{gh}} = III_C (C^{-1})_{ef} (C^{-1})_{gh} + III_C \frac{\partial(C^{-1})_{gh}}{\partial C_{ef}} \quad (126)$$

$$= III_C (C^{-1})_{ef} (C^{-1})_{gh} - III_C (C^{-1})_{ge} (C^{-1})_{fh} \quad (127)$$

となる。これを代入すると

$$C_{ghef}^P = 4\lambda III_C \{III_C \Psi''(III_C) + 1\} (C^{-1})_{ef} (C^{-1})_{gh} \quad (128)$$

$$-4\lambda III_C \Psi'(III_C) s (C^{-1})_{ge} (C^{-1})_{fh} \quad (129)$$

$$\bar{C}_{ghef}^P = 4\lambda III_C \{III_C \Psi''(III_C) + 1\} (C^{-1})_{ef} (C^{-1})_{gh} \quad (130)$$

$$-2\lambda III_C \Psi'(III_C) \{ (C^{-1})_{ge} (C^{-1})_{fh} + (C^{-1})_{gf} (C^{-1})_{eh} \} \quad (131)$$

2.5.3 接線剛性行列 (圧力-変位)

$$[K_e^{PU}]_{j}^{rq} = \frac{\partial \{Q^P\}^r}{\partial u_j^q} \quad (132)$$

$$= \int_{V_e} M^r \frac{\partial \Psi}{\partial u_j^q} dV \quad (133)$$

$$= \int_{V_e} M^r \frac{\partial \Psi}{\partial III_C} \frac{\partial III_C}{\partial C_{gh}} \frac{\partial C_{gh}}{\partial u_j^q} dV \quad (134)$$

$$= \int_{V_e} 2M^r \Psi' (III_C) III_C (C^{-1})_{gh} [B_{gh}]_j^q dV \quad (135)$$

2.5.4 接線剛性行列 (変位-圧力)

$$[K_e^{UP}]_i^{ps} = \frac{\partial \{Q^U\}_i^p}{\partial \lambda^s} \quad (136)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \lambda^s} \int_{V_e} 2 \left(\frac{\partial W}{\partial C_{gh}} + \lambda \frac{\partial \Psi}{\partial C_{gh}} \right) \frac{\partial E_{gh}}{\partial u_i^p} dV \quad (137)$$

$$= \int_{V_e} 2M^s \frac{\partial \Psi}{\partial C_{gh}} \frac{\partial E_{gh}}{\partial u_i^p} dV \quad (138)$$

$$= \int_{V_e} 2M^s \Psi' (III_C) III_C (C^{-1})_{gh} [B_{gh}]_i^p dV \quad (139)$$

上と見比べると次のような関係があることが分かる。

$$[K_e^{UP}]_i^{ps} = [K_e^{PU}]^{sp}_i \quad (140)$$

行列としては転置であるといえる。

$$[K_e^{UP}] = [K_e^{PU}]^T \quad (141)$$

2.5.5 接線剛性行列 (圧力-圧力)

$$[K_e^{PP}]^{rs} = \frac{\partial \{Q^P\}^r}{\partial \lambda^s} = \frac{\partial}{\partial \lambda^s} \int_{V_e} M^r \Psi dV = 0 \quad (142)$$

以上をまとめると次のようになる。

$$[K] = \sum_e [K_e] \quad (143)$$

$$[K_e] = \begin{bmatrix} [K_e^{UU}]_{ij}^{pq} & [K_e^{UP}]_i^{ps} \\ [K_e^{PU}]_{j}^{rq} & [K_e^{PP}]_{rs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_e^{UU}]_{ij}^{pq} & [K_e^{PU}]^{sp} \\ [K_e^{PU}]_{j}^{rq} & 0 \end{bmatrix} \quad (144)$$

$$[K_e^{PU}]_{j}^{rq} = \int_{V_e} 2M^r \Psi'(III_C) III_C (C^{-1})_{gh} [B_{gh}]_j^q dV \quad (145)$$

$$[K_e^{UU}]_{ij}^{pq} = \int_{V_e} \bar{C}_{ghef} [B_{ef}]_j^q [B_{gh}]_i^p + S_{gh} \frac{\partial N_p}{\partial X_g} \frac{\partial N_q}{\partial X_h} \delta_{ij} dV \quad (146)$$

$$\bar{C}_{ghef} = \bar{C}_{ghef}^U + \bar{C}_{ghef}^P \quad (147)$$

$$\bar{C}_{ghef}^U = \frac{1}{2} (C_{ghef}^U + C_{ghfe}^U) \quad (148)$$

$$C_{ghef}^U = 4 \frac{\partial W}{\partial C_{gh} \partial C_{ef}} \quad (149)$$

$$\bar{C}_{ghef}^P = 4\lambda III_C \{III_C \Psi''(III_C) + 1\} (C^{-1})_{ef} (C^{-1})_{gh} \quad (150)$$

$$-2\lambda III_C \Psi'(III_C) \{ (C^{-1})_{ge} (C^{-1})_{fh} + (C^{-1})_{gf} (C^{-1})_{eh} \} \quad (151)$$

3 様々な非圧縮性超弾性体

以下では様々な物質について S^U 、 \bar{C}^U を計算する。

3.1 Neo-Hooke 体

$$\begin{cases} W = c_1(I_C - 3) \\ III_C = 1 \end{cases} \quad (152)$$

後に述べる Mooney-Rivlin 体の一種 ($c_2 = 0$) なので省略する。

3.2 Mooney-Rivlin 体

$$\begin{cases} W = c_1(I_C - 3) + c_2(II_C - 3) \\ III_C = 1 \end{cases} \quad (153)$$

$$S_{gh}^U = \frac{\partial W}{\partial E_{gh}} = 2 \frac{\partial W}{\partial C_{gh}} = 2c_1 \frac{\partial I_C}{\partial C_{gh}} + 2c_2 \frac{\partial II_C}{\partial C_{gh}} \quad (154)$$

$$= 2c_1 \delta_{gh} + 2c_2(I_C \delta_{gh} - C_{gh}) \quad (155)$$

$$= 2(c_1 + c_2 I_C) \delta_{gh} - 2c_2 C_{gh} \quad (156)$$

$$C_{ghef}^U = \frac{\partial^2 W}{\partial E_{ef} \partial E_{gh}} \quad (157)$$

$$= 2 \frac{\partial}{\partial C_{ef}} \left(2 \frac{\partial W}{\partial C_{gh}} \right) \quad (158)$$

$$= 2 \frac{\partial S_{gh}}{\partial C_{ef}} \quad (159)$$

$$= 2 \frac{\partial}{\partial C_{ef}} \{ 2(c_1 + c_2 I_C) \delta_{gh} - 2c_2 C_{gh} \} \quad (160)$$

$$= 4c_2 \delta_{ef} \delta_{gh} - 4c_2 \delta_{ge} \delta_{fh} \quad (161)$$

$$\bar{C}_{ghef}^U = \frac{1}{2} (C_{ghef}^U + C_{ghfe}^U) = 4c_2 \delta_{ef} \delta_{gh} - 2c_2 \delta_{ge} \delta_{fh} - 2c_2 \delta_{gf} \delta_{eh} \quad (162)$$

4 非圧縮性超弾性体への低減主不変量の導入

4.1 エネルギーポテンシャル関数の補正

非圧縮性超弾性体の応力は次のとおりであった, $S_{ij} = -\lambda(\mathbf{C}^{-1})_{ij} + 2\left(\frac{\partial W}{\partial I_C} + \frac{\partial W}{\partial II_C} I_C\right) \delta_{ij} - \frac{\partial W}{\partial III_C} C_{ij} + \frac{\partial W}{\partial III_C} III_C (C^{-1})_{ij}$ ここで、無変形の場合を考えよう. 無変形の場合、 $C = I, C_{ij} = \delta_{ij}, I_C = 3, II_C = 3, III_C = 1$ となるから、 $S_{ij} = \{-\lambda + 2\frac{\partial W}{\partial I_C} + 4\frac{\partial W}{\partial II_C} + 2\frac{\partial W}{\partial III_C}\} \delta_{ij}$ となる. つまり応力が0のときに λ は

$$\lambda = 2 \frac{\partial W}{\partial I_C} + 4 \frac{\partial W}{\partial II_C} + 2 \frac{\partial W}{\partial III_C} \quad (163)$$

となる値をとることがわかる。λは非圧縮性の拘束条件に対するラグランジュ未定乗数であり、圧力に対応する量であるので、応力が0なときに

$$\lambda = 2\frac{\partial W}{\partial I_C} + 4\frac{\partial W}{\partial II_C} + 2\frac{\partial W}{\partial III_C} = 0 \quad (164)$$

となるようにできればラグランジュ未定乗数の意味が理解しやすい。

4.1.1 低減不変量

Wを少し変えることで、上の式が満たされるようにする。W(I_C, II_C, III_C)であったが、これをW($\bar{I}_C, \bar{II}_C, \bar{III}_C$)のように置き換えることを考える。但し、

低減不変量

$$\bar{I}_C = \frac{I_C}{III_C^{1/3}}, \quad \bar{II}_C = \frac{II_C}{III_C^{2/3}}, \quad \bar{III}_C = 1 \quad (165)$$

これらを低減主不変量 (Reduced Invariants) と呼ぶ。

$$\frac{\partial W}{\partial I_C} = \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_C} \frac{\partial \bar{I}_C}{\partial I_C} = \frac{1}{III_C^{1/3}} \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_C} \quad (166)$$

$$\frac{\partial W}{\partial II_C} = \frac{\partial W}{\partial \bar{II}_C} \frac{\partial \bar{II}_C}{\partial II_C} = \frac{1}{III_C^{2/3}} \frac{\partial W}{\partial \bar{II}_C} \quad (167)$$

$$\frac{\partial W}{\partial III_C} = \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_C} \frac{\partial \bar{I}_C}{\partial III_C} + \frac{\partial W}{\partial \bar{II}_C} \frac{\partial \bar{II}_C}{\partial III_C} = -\frac{1}{3} \frac{I_C}{III_C^{4/3}} \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_C} - \frac{2}{3} \frac{II_C}{III_C^{5/3}} \frac{\partial W}{\partial \bar{II}_C} \quad (168)$$

となる。さて、無変形で応力が0の時にλは次のとおり。

$$\lambda = 2\frac{\partial W}{\partial I_C} + 4\frac{\partial W}{\partial II_C} + 2\frac{\partial W}{\partial III_C} \quad (169)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{1^{1/3}} \cdot \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_C} + 4 \cdot \frac{1}{1^{2/3}} \cdot \frac{\partial W}{\partial \bar{II}_C} + 2 \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{1^{4/3}} \cdot \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_C} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{1^{5/3}} \cdot \frac{\partial W}{\partial \bar{II}_C} \right) \quad (170)$$

$$= 0 \quad (171)$$

よって、低減主不変量を用いて書くと無変形状態で応力ゼロのときλ=0となることがわかる。

4.2 低減不変量を考慮した超弾性体の応力

下の超弾性体の応力の式に上式を代入する.

$$S_{ij}^U = 2\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial I_C} + \frac{\partial W}{\partial II_C} I_C\right)\delta_{ij} - \frac{\partial W}{\partial III_C} C_{ij} + \frac{\partial W}{\partial III_C} III_C (C^{-1})_{ij}\right\} \quad (172)$$

非圧縮性超弾性体の応力を書き直すと次のようになる.

低減不変量を用いた非圧縮性超弾性体の応力

$$\begin{aligned} S_{ij} = & -\lambda (C^{-1})_{ij} + 2\left(\frac{1}{III_C^{1/3}} \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_C} + \frac{1}{III_C^{2/3}} \frac{\partial W}{\partial \bar{II}_C} I_C\right)\delta_{ij} \\ & - \frac{2}{III_C^{2/3}} \frac{\partial W}{\partial \bar{II}_C} C_{ij} \\ & - 2\left(\frac{1}{3} \frac{I_C}{III_C^{1/3}} \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_C} + \frac{2}{3} \frac{II_C}{III_C^{2/3}} \frac{\partial W}{\partial \bar{II}_C}\right)(C^{-1})_{ij} \end{aligned} \quad (173)$$

$$S_{ij}^U = 2 \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} = 2 \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_C} \frac{\partial \bar{I}_C}{\partial C_{ij}} + 2 \frac{\partial W}{\partial \bar{II}_C} \frac{\partial \bar{II}_C}{\partial C_{ij}} \quad (174)$$

4.3 構成則テンソル

$$C_{ghcf}^U = 4 \frac{\partial W}{\partial C_{gh} \partial C_{ef}} \quad (175)$$

$$= 4 \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_C} \frac{\partial \bar{I}_C}{\partial C_{gh} \partial C_{ef}} + 4 \frac{\partial W}{\partial \bar{II}_C} \frac{\partial \bar{II}_C}{\partial C_{gh} \partial C_{ef}} \quad (176)$$

4.4 低減不変量の微分

ここで、右 Cauchy-Green 歪みテンソル C の第一、第二低減不変量 \bar{I}_C 、 \bar{II}_C の 1 回微分と 2 回微分をそれぞれ求めよう.

$$\frac{\partial III_C^{-1/3}}{\partial C_{ij}} = -\frac{1}{3} III_C^{-4/3} \frac{\partial III_C}{\partial C_{ij}} \quad (177)$$

$$= -\frac{1}{3}III_C^{-4/3}III_C(C^{-1})_{ij} \quad (178)$$

$$= -\frac{1}{3}III_C^{-1/3}(C^{-1})_{ij} \quad (179)$$

$$\frac{\partial \bar{I}}{\partial C_{ij}} = \frac{\partial}{\partial C_{ij}} (III_C^{-1/3}I_C) \quad (180)$$

$$= \frac{\partial III_C^{-1/3}}{\partial C_{ij}} I_C + III_C^{-1/3} \frac{\partial I_C}{\partial C_{ij}} \quad (181)$$

$$= -\frac{1}{3}III_C^{-1/3}(C^{-1})_{ij}I_C + III_C^{-1/3}\delta_{ij} \quad (182)$$

$$= III_C^{-1/3} \left\{ \delta_{ij} - \frac{1}{3}I_C(C^{-1})_{ij} \right\} \quad (183)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{I}}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} = \frac{\partial III_C^{-1/3}}{\partial C_{kl}} \left\{ \delta_{ij} - \frac{1}{3}I_C(C^{-1})_{ij} \right\} + III_C^{-1/3} \frac{\partial}{\partial C_{kl}} \left\{ \delta_{ij} - \frac{1}{3}I_C(C^{-1})_{ij} \right\} \quad (184)$$

$$= -\frac{1}{3}III_C^{-1/3}(C^{-1})_{kl} \left\{ \delta_{ij} - \frac{1}{3}I_C(C^{-1})_{ij} \right\} \quad (185)$$

$$+ III_C^{-1/3} \left\{ -\frac{1}{3}\delta_{kl}(C^{-1})_{ij} + \frac{1}{3}I_C(C^{-1})_{ik}(C^{-1})_{lj} \right\} \quad (186)$$

$$= \frac{1}{3}III_C^{-1/3} \left\{ \frac{1}{3}I_C(C^{-1})_{ij}(C^{-1})_{kl} - \delta_{ij}(C^{-1})_{kl} - (C^{-1})_{ij}\delta_{kl} + I_C(C^{-1})_{ik}(C^{-1})_{lj} \right\}$$

$$\frac{\partial III_C^{-2/3}}{\partial C_{ij}} = -\frac{2}{3}III_C^{-5/3} \frac{\partial III_C}{\partial C_{ij}} = -\frac{2}{3}III_C^{-5/3}III_C(C^{-1})_{ij} = -\frac{2}{3}III_C^{-2/3}(C^{-1})_{ij} \quad (188)$$

$$\frac{\partial \bar{II}_C}{\partial C_{ij}} = \frac{\partial}{\partial C_{ij}} (III_C^{-2/3}II_C) \quad (189)$$

$$= \frac{\partial III_C^{-2/3}}{\partial C_{ij}} II_C + III_C^{-2/3} \frac{\partial II_C}{\partial C_{ij}} \quad (190)$$

$$= -\frac{2}{3}III_C^{-2/3}(C^{-1})_{ij}II_C + III_C^{-2/3} (I_C\delta_{ij} - C_{ij}) \quad (191)$$

$$= III_C^{-2/3} \{ I_C\delta_{ij} - C_{ij} - \frac{2}{3}II_C(C^{-1})_{ij} \} \quad (192)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{I}_C}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} = \frac{\partial III_C^{-2/3}}{\partial C_{kl}} \{I_C \delta_{ij} - C_{ij} - \frac{2}{3} II_C (C^{-1})_{ij}\} \quad (193)$$

$$+ III_C^{-2/3} \frac{\partial}{\partial C_{kl}} \{I_C \delta_{ij} - C_{ij} - \frac{2}{3} II_C (C^{-1})_{ij}\} \quad (194)$$

$$= -\frac{2}{3} III_C^{-2/3} (C^{-1})_{kl} \{I_C \delta_{ij} - C_{ij} - \frac{2}{3} II_C (C^{-1})_{ij}\} \quad (195)$$

$$+ III_C^{-2/3} \{\delta_{kl} \delta_{ij} - \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{2}{3} (I_C \delta_{kl} - C_{kl}) (C^{-1})_{ij} + \frac{2}{3} II_C (C^{-1})_{ik} (C^{-1})_{lj}\} \quad (196)$$

$$= III_C^{-2/3} \{\delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{4}{9} II_C (C^{-1})_{ij} (C^{-1})_{kl}\} \quad (197)$$

$$+ \frac{2}{3} III_C^{-2/3} \{(C_{ij} - I_C \delta_{ij}) (C^{-1})_{kl} + (C^{-1})_{ij} (C_{kl} - I_C \delta_{kl})\} \quad (198)$$

$$+ III_C^{-2/3} \{\frac{2}{3} II_C (C^{-1})_{ik} (C^{-1})_{lj} - \delta_{ik} \delta_{jl}\} \quad (199)$$

4.5 低減不変量を使った Moony-Rivlin 体

$$\begin{cases} W = c_1 (\bar{I}_C - 3) + c_2 (\bar{II}_C - 3) \\ III_C = 1 \end{cases} \quad (200)$$

$$S_{gh}^U = \frac{\partial W}{\partial E_{gh}} = 2 \frac{\partial W}{\partial C_{gh}} \quad (201)$$

$$= \left(\frac{2c_1}{III_C^{1/3}} + \frac{2c_2 I_C}{III_C^{2/3}} \right) \delta_{gh} - \frac{2c_2}{III_C^{2/3}} C_{gh} \quad (202)$$

$$- \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2c_1 I_C}{III_C^{1/3}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2c_2 II_C}{III_C^{2/3}} \right) (C^{-1})_{gh} \quad (203)$$