

# Discrete Kirhhoff Triangle 要素\*

梅谷 信行

平成 22 年 7 月 9 日

## 目次

<b>1</b>	<b>概要</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>薄板理論</b>	<b>3</b>
2.1	歪と応力 . . . . .	3
2.2	撓みと曲率 . . . . .	4
2.3	歪エネルギー . . . . .	5
2.4	曲げモーメント、捩じりモーメント . . . . .	6
<b>3</b>	<b>1次元梁要素の変位法による解析</b>	<b>7</b>
3.1	両端固定梁 . . . . .	7
3.1.1	弱形式化 . . . . .	8
3.1.2	補間関数 . . . . .	8
<b>4</b>	<b>DKT 板曲げ要素</b>	<b>10</b>
4.1	辺の midpoint における回転量 . . . . .	10
4.1.1	1 番目の条件 . . . . .	11
4.1.2	2 番目の条件 . . . . .	12
4.1.3	3 番目の条件 . . . . .	13
4.1.4	midpoint での回転の値 . . . . .	13
4.2	節点の撓み $w$ と $xy$ 軸回転から曲率を求める行列 . . . . .	15
4.2.1	撓み角の 2 次補間 . . . . .	15

\*これは忘れっぽい著者が昔勉強したことを書き留めておく備忘録です。きっと間違いを多く含んでいます。すいません。ご指摘ご意見などありましたら教えてもらえると有り難いです。

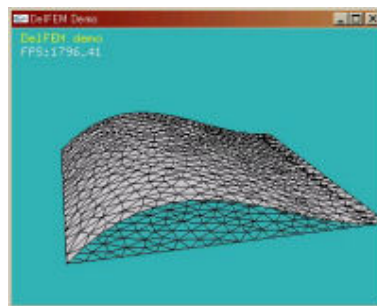
4.2.2	行列、ベクトル表記 . . . . .	16
4.2.3	線形形状関数の導入 . . . . .	16
4.2.4	撓み角の微分 . . . . .	17
4.2.5	中立面の曲率 . . . . .	18
4.3	剛性行列 . . . . .	19

# 1 概要

[1],[2],[3],[4],[5],[6],[7] を参考にして解説する.

DKT 要素 (Discrete Kirchhoff Triangle) は薄板 3 角形要素の中で広く使われる要素である。薄板要素とは Kirchhoff の仮定が成り立つような要素である。薄板の解析において一般的な変位法を用いた有限要素法では Kirchhoff の仮定は一種の制約条件として働く。このときような問題を変位法で解析する場合、補間関数が要素間で  $C_1$  連続を満たさなければならない。これには Hermaite 型のような高次の補間関数を必要とするので手続きが非常に煩雑であるという欠点がある。DKT 要素では Kirchhoff の仮定が要素の中の離散的な点においてのみ成り立つとして計算を行う。このため、撓みや回転角の  $C_1$  連続性は考慮しなくてもよく、一般的な補間関数を用いることができるので容易であるという利点がある。DKT 要素を用いた薄板の解析は 1960 年代に Dhatt[4] らによって提案された。それから 10 年の後、Batoz[6] によって種々の薄板要素が数値実験によって比較され、DKT 要素の有効性が示された。離散 Kirchhoff 条件を四角形に応用した DKQ(Discrete Kirchhoff Quadrilateral) やさらに多角形に応用した要素も提案されている。

図 1: DKT 要素による板の撓み



## 2 薄板理論

薄板には次の3つの仮定が成り立つ。

1. 中立面は変形で伸縮されない。
2. 変形前に中立面に垂直だった物質中の直線は、変形後も中立面に対して垂直で直線である。
3. 面外剪断による歪エネルギーは曲げエネルギーに対して十分小さいので無視できる。

これらの仮定は Kirchhoff の仮定 (Kirchhoff's hypothesis) と呼ばれ、これを元に微小変形薄板要素が作られる。薄板が  $x$   $y$  平面上にある場合に板が  $z$  方向へ撓んでいるとしよう。  $x$   $y$   $z$  の変位は次のようになる。

$$u = z\theta_y \quad (1)$$

$$v = -z\theta_x \quad (2)$$

$$z = w \quad (3)$$

ここで  $w$  は撓み (Deflection) であり、 $\theta_x$ 、 $\theta_y$  はそれぞれ中立面の垂線の  $x$  軸まわり、 $y$  軸周りの回転量である。

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (4)$$

$$\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (5)$$

### 2.1 歪と応力

この時工学歪は次のようになる。

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (6)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (7)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (8)$$

平面応力条件では応力-歪関係は次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \\ \nu & 1 & \\ & & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

歪を撓み  $w$  によって置き換えると、

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \\ \nu & 1 & \\ & & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

## 2.2 撓みと曲率

板の中立面の曲率をたわみ  $z$  や撓み角  $\theta$  と対応づけてみよう。板の中立面上の点  $\mathbf{p}$  は次のように表されるのだった

$$\mathbf{p}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ w(x, y) \end{pmatrix} \quad (11)$$

これを  $x, y$  で微分することにより接ベクトルを  $\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y$  を求めると

$$\mathbf{r}_x = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{r}_y = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (13)$$

さて接ベクトル  $\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y$  に直交するベクトル  $\mathbf{r}_3$  は外積を用いて次のように書ける

$$\mathbf{r}_3 = \frac{\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y}{\|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial w}{\partial x} \\ -\frac{\partial w}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -\frac{\partial w}{\partial x} \\ -\frac{\partial w}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

さて曲面の曲率テンソル  $\kappa$  は次のように定義される

$$\kappa_{ij} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{x}_j} \cdot \mathbf{r}_3 \quad (15)$$

これから

$$\kappa_{xx} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\partial w}{\partial x} \\ -\frac{\partial w}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (16)$$

$$\kappa_{yy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\partial w}{\partial x} \\ -\frac{\partial w}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (17)$$

$$\kappa_{xy} = \kappa_{yx} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\partial w}{\partial x} \\ -\frac{\partial w}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (18)$$

ここで曲率テンソル  $\kappa$  を次のようにベクトル表記する。

$$\kappa = \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (19)$$

### 2.3 歪エネルギー

さてここで曲げによる歪エネルギー  $U_b$  を求めてみよう。

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz d\Omega \quad (20)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}^T \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \\ \nu & 1 & \\ & & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} dz d\Omega \quad (21)$$

ここで  $D = \int_{-t/2}^{t/2} \frac{z^2 E}{1-\nu^2} dz = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{1}{3} z^3 \right]_{-t/2}^{t/2} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$  とおき

$$D_b = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & \\ \nu & 1 & \\ & & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (22)$$

とおくと次のように書ける。

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}^T D_b \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} d\Omega \quad (23)$$

さらに変形後の中立面の曲率  $\kappa$  ベクトルを使うと歪エネルギーは次のように書ける

薄板の歪エネルギー

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \kappa D_b \kappa d\Omega \quad (24)$$

これは Kirchhoff 条件を仮定しない一般的な問題の曲げ歪エネルギー  $U_b$  にあたる。つまり薄板の曲げによる歪エネルギーは、剪断歪エネルギーが 0 で曲げ歪エネルギーだけである。

## 2.4 曲げモーメント、捩じりモーメント

行列表記をやめると次のように書ける。

$$\sigma_x = \frac{-zE}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (25)$$

$$\sigma_y = \frac{-zE}{1-\nu^2} \left[ \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (26)$$

$$\tau_{xy} = \frac{-2zE}{1-\nu^2} \left( \frac{1-\nu}{2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (27)$$

曲げモーメント、捩りモーメントは次のとおり

$$M_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x \cdot z dz = \frac{-Et^3}{12(1-\nu^2)} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = D \left[ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (28)$$

$$M_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_y \cdot z dz = \frac{-Et^3}{12(1-\nu^2)} \left[ \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = D \left[ -\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (29)$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xy} \cdot z dz = \frac{-2Et^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{1-\nu}{2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = D \left( \frac{1-\nu}{2} \right) \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (30)$$

### 3 1次元梁要素の変位法による解析

1次元梁の問題の問題を通して、梁問題を変位法で解析する場合、撓みとその勾配が要素間で連続でなければならないことを示しておく。1次元梁問題ではこのような補間は比較的容易であるが、シェルの問題になると複雑な補間が必要であり、実用的ではない。後に示すようにDKTは辺上で撓みを3次補間しているのと等価であり、ある種のアナロジーが成り立つ。

#### 3.1 両端固定梁

次のような両端が変位と回転が固定されているような梁の問題を考えよう

$$w(0) = w(l) = w'(0) = w'(l) = 0 \quad (31)$$

$k$ を曲げ剛性、つまり  $k = EI$  (但し  $E$ はヤング率  $I$ は断面2次モーメント) とするとのように書ける。

$$M = k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (32)$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = f \quad (33)$$

よって、強形式の支配方程式は

$$\begin{cases} k \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = f \\ w(0) = w(l) = w'(0) = w'(l) = 0 \end{cases} \quad (34)$$

となる。強形式では  $w$  は 4 回微分可能でなければならない。

### 3.1.1 弱形式化

この問題は次のように弱形式化される

$$\text{find } v \in W \text{ st } \int_0^l k w'' v'' dx = \int_0^l f v dx, \quad \forall v \in W \quad (35)$$

ここで  $W$  は 2 階微分が可能で、2 階微分がリーマン可積分、つまり 2 階微分が区間連続であること。それに加えて、境界条件を満たす集合である、つまり

$$W = \{ v \mid v \in C[0, l], v' \in C[0, l], v'' \in PC[0, l], v(0) = v(l) = v'(0) = v'(l) = 0 \} \quad (36)$$

強形式の式が成り立てば弱形式の式が成り立つことを示す。強形式の式に任意の  $v \in W$  を乗じて、区間  $[0, l]$  で積分すると、

$$\int_0^l k \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} v dx = \int_0^l f v dx \quad (37)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} v \right) dx - \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \int_0^l k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx = \int_0^l f v dx \quad (38)$$

左辺第 1, 2 項は  $v(0) = v(l) = v'(0) = v'(l) = 0$  から 0 になる。よって

$$\int_0^l k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx = \int_0^l f v dx \quad (39)$$

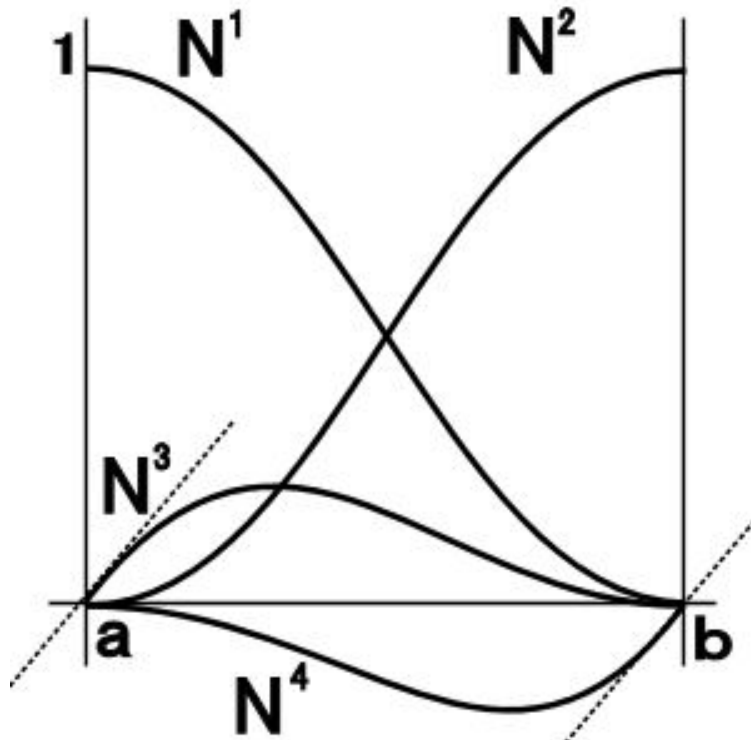
が成り立つ。

### 3.1.2 補間関数

区間  $I = [0, l]$  を分割して  $I_i = [a, b]$  となっていることにしよう。つまり、要素の中で、 $v$  は  $C^2$  級関数であるとする、 $v$  の 2 階微分は区間連続である。さて、 $v$  が



図 2: 梁の補間関数



連続であるためには、節点を区間要素の両端に置けば、隣合う要素同士で値を共有するので良かった。同様に  $v'$  が連続であるためには勾配を表す節点を区間要素の両端に置けばよい。要素  $I_i$  の中で補間関数の 2 階微分が定数であるとしよう。つまり、要素間で補間関数は 3 次関数となる。要素  $I_i$  の 4 つの節点 (両端における変位と変位勾配) に対応する補間関数  $N^1, N^2, N^3, N^4$  は次のようになる。

$$N_i^1(a) = 1, N_i^1(b) = 0, N_i^1(a) = 0, N_i^1(b) = 0 \quad (40)$$

$$N_i^2(a) = 0, N_i^2(b) = 0, N_i^2(a) = 1, N_i^2(b) = 0 \quad (41)$$

$$N_i^3(a) = 0, N_i^3(b) = 1, N_i^3(a) = 0, N_i^3(b) = 0 \quad (42)$$

$$N_i^4(a) = 0, N_i^4(b) = 0, N_i^4(a) = 0, N_i^4(b) = 1 \quad (43)$$

## 4 DKT 板曲げ要素

薄板の歪エネルギーは面の曲率のみを用いて書くことができることがわかった。面の曲率は回転の微分から求められる。面内の回転の分布がわかればエネルギーが求まるということがわかる。x 軸周りの回転、y 軸周りの回転が次のように三角形の頂点と辺の midpoint における回転によって 2 次補間されるとする

$$\theta = \sum_{i=1}^6 N^i \theta^i \quad (44)$$

さて頂点における回転量が変数として与えられているので、辺の midpoint における回転量がわかれば回転量の三角形内の分布を求めることができる。分布が求められれば微分をとって曲率をもとまる。その曲率をもとにエネルギー、剛性行列がもとまる。

### DKT 要素作成の流れ

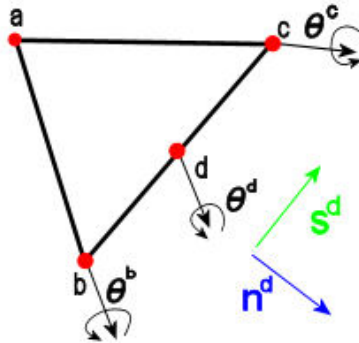
1. 頂点における撓み  $w$
2. x y 軸周りの回転
3. 頂点および辺の midpoint における x y 軸周りの回転
4. x y 軸周りの回転の補間
5. 回転の微分をとって曲率を求める
6. エネルギーを計算し、剛性行列を求める。

以下に示すように撓み  $w$  は要素の頂点および辺の midpoint で  $C_1$  級連続である。しかし、midpoint 以外の辺上では連続性は考慮されない。よって厳密に言えば DKT 要素は非適合要素の部類に入る。DKT 法はエネルギーを得るために直接変位を使う変位法と違い、回転角を得るためだけに撓み  $w$  を使い、回転角から導かれる曲率をもとにエネルギーを計算しているため、このような変位の不連続性があってもあまり気にする必要はない。

### 4.1 辺の midpoint における回転量

下図のように、三角形 abc があつた場合に辺 bc の midpoint d があるとする。

図 3: 中点におけるディレクターの回転



辺 bc の中点 d における回転量  $\theta^d$  を辺の頂点の撓み  $w^b, w^c$  と回転  $\theta^b, \theta^c$  によって求める方法を考えよう。これには以下の 3 つの条件を使う。

- $\theta^d \cdot \mathbf{s}^d = \frac{1}{2}(\theta^b \cdot \mathbf{s}^d + \theta^c \cdot \mathbf{s}^d)$
- 辺の中点における辺に添った方向の撓み  $w$  の微分は辺上で変位が 3 次関数と仮定したときの値に等しい。
- 3 角形要素の頂点及び辺の中点で Kirihoff 条件を満たす (“Discrete Kirihoff 条件”)

#### 4.1.1 1 番目の条件

1 番目の条件は辺に添ったベクトル周りの回転において中点の値が頂点の値から線形補間されることを意味している。中点において、辺に添ったベクトル周りの回転について Kirchhoff 条件から回転量を定めようとするとき撓み  $w$  の辺と垂直な方向への微分が必要になる。これは要素内部の撓み  $w$  の情報が必要であることを意味している。すると辺を介して向かい合う要素同士で中点における、辺と垂直な方向の微分の連続性を満たすことができなくなる。微分の連続性を保つためには、このように辺を介して向かい合う要素が両方とも共有している辺両端の情報から回転を決めることが必要不可欠となってくる。これは次に求める、辺に添ったベクトル周りの回転だけでなく、辺に垂直なベクトル周りの回転についてもいえる。

さて、1 番目の条件が仮定された時、中点における回転を求める際に、辺の法線周りの回転の中点での値  $\theta^d \cdot \mathbf{n}^d$  がわかれば、座標変換を使って  $\theta = (\theta^d \cdot \mathbf{s}^d) \mathbf{s}^d + (\theta^d \cdot \mathbf{n}^d) \mathbf{n}^d$

というように中点での回転を求めることができる。 $\theta^d \cdot \mathbf{n}^d$  を頂点の回転と撓み  $w$  から求めるために 2 番目と 3 番目の条件を使う。

#### 4.1.2 2 番目の条件

2 番目の条件について考えてみよう。回転が面内で 2 次補間されていることから、辺上の回転は 2 次関数である。座標変換すると辺の法線周りの回転も 2 次関数である。辺に添った方向での撓み  $w$  の微分に関して Kirchhoff 条件が成り立つ場合、 $w$  の微分が辺に垂直なベクトル周りの回転になるということであるから、撓み  $w$  は辺上で 3 次関数になることを意味している。辺上の撓み  $w$  をとりあえず求めてみよう。辺上の撓み  $w$  の分布がわかれば 3 番目の条件から  $\theta^d \cdot \mathbf{s}^d$  を求めることができる。辺上の撓み  $w$  の分布が 3 次関数であることが仮定されている。3 次関数を定めるためには何か 4 つ条件があればよい (例えば 4 つの点における値など)。今 3 角形の頂点における値から辺の中点における値を求めたかったから、4 つの条件を辺の両端における値とその微分としよう。辺  $d$  の長さを  $l_d$  とするとき、頂点  $b$  で 0 頂点  $c$  で  $l_d$  をとるような媒介変数  $s$  を用いて  $w$  の辺  $d$  における値  $\bar{w}^d(s)$  を表す。これらの条件は次のように書ける。

$$\bar{w}^d(l_d) = w^c \quad (45)$$

$$\frac{\partial \bar{w}^d}{\partial s}(l_d) = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{s}^d} \Big|_c = (\nabla w)^c \cdot \mathbf{s}^d \quad (46)$$

$s$  と  $l_d - s$  に関する対称性に注意すると、簡単な計算から  $w^d(s)$  は次のように書ける

$$\bar{w}^d(s) = \frac{(l_d - s)^2 \{3s + (l_d - s)\}}{l_d^3} w^b + \frac{s^2 \{3(l_d - s) + s\}}{l_d^3} w^c + \frac{s(l_d - s)^2}{l_d^2} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{s}^d} \Big|_b + \frac{s^2(l_d - s)}{l_d^2} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{s}^d} \Big|_c \quad (47)$$

上の微分を計算すると

$$\frac{\partial \bar{w}^d}{\partial s}(s) = \frac{-6s(l_d - s)}{l_d^3} w^b + \frac{6(l_d - s)s}{l_d^3} w^c - \frac{(l_d - s)\{2s - (l_d - s)\}}{l_d^2} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{s}^d} \Big|_b - \frac{s\{2(l_d - s) - s\}}{l_d^2} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{s}^d} \Big|_c \quad (48)$$

上式に  $s = \frac{l_d}{2}$  を代入して辺の中点  $k$  での辺に添った方向の微分を求める。

$$\frac{\partial w}{\partial \mathbf{s}^d} \Big|_d = \frac{\partial \bar{w}^d}{\partial s} \left( \frac{l_d}{2} \right) = -\frac{3}{2l_d} w^b + \frac{3}{2l_d} w^c - \frac{1}{4} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{s}^d} \Big|_b - \frac{1}{4} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{s}^d} \Big|_c \quad (49)$$

書き換えると

$$(\nabla w)^d \cdot \mathbf{s}^d = -\frac{3}{2l_d}w^b + \frac{3}{2l_d}w^c - \frac{1}{4}(\nabla w)^b \cdot \mathbf{s}^d - \frac{1}{4}(\nabla w)^c \cdot \mathbf{s}^d \quad (50)$$

さて、辺の midpoint  $d$  上での辺に添った方向  $\mathbf{s}^d$  の  $w$  の微分が上のように表されることがわかった。これと 3 番目の条件を用いて  $\theta_s^d$  を求めてみよう。

### 4.1.3 3番目の条件

2 番目の条件は Kirihoff 条件を離散的に満たすから Discrete Kirihoff 条件（離散 Kirihoff 条件）と呼ばれる。以下の式が頂点と辺の midpoint で成り立つ。

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} \quad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (51)$$

これを用いて撓み  $w$  の勾配を計算すると

$$\nabla w = \frac{\partial w}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial w}{\partial y} \mathbf{e}_y = -\theta_y \mathbf{e}_x + \theta_x \mathbf{e}_y \quad (52)$$

$$(\nabla w) \cdot \mathbf{s} = -\theta_y(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{s}) + \theta_x(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{s}) = \theta_y(-s_x) + \theta_x s_y = \theta_y n_y + \theta_x n_x = \theta \cdot \mathbf{n} \quad (53)$$

これを上の式に代入すると

$$\theta^d \cdot \mathbf{n}^d = -\frac{3}{2l_d}w^b + \frac{3}{2l_d}w^c - \frac{1}{4}\theta^b \cdot \mathbf{n}^d - \frac{1}{4}\theta^c \cdot \mathbf{n}^d \quad (54)$$

となり、法線方向の回転が得られる。

### 4.1.4 中点での回転の値

$$\theta^d \cdot \mathbf{n}^d = -\frac{3}{2l_d}w^b + \frac{3}{2l_d}w^c - \frac{1}{4}\theta^b \cdot \mathbf{n}^d - \frac{1}{4}\theta^c \cdot \mathbf{n}^d \quad (55)$$

$$\theta^d \cdot \mathbf{s}^d = \frac{1}{2}(\theta^b \cdot \mathbf{s}^d + \theta^c \cdot \mathbf{s}^d) \quad (56)$$

であった。ここから  $\theta^d$  を求めよう。 $\mathbf{s}^d$  と  $\mathbf{n}^d$  は直交しているから

$$\theta^d = (\theta^d \cdot \mathbf{n}^d) \mathbf{n}^d + (\theta^d \cdot \mathbf{s}^d) \mathbf{s}^d \quad (57)$$

$$= \left( -\frac{3}{2l_d}w^b + \frac{3}{2l_d}w^c - \frac{1}{4}\theta^b \cdot \mathbf{n}^d - \frac{1}{4}\theta^c \cdot \mathbf{n}^d \right) \mathbf{n}^d + \left( \frac{1}{2}\theta^b \cdot \mathbf{s}^d + \frac{1}{2}\theta^c \cdot \mathbf{s}^d \right) \mathbf{s}^d \quad (58)$$

これで中点における回転量が求まったわけであるが、成分を書き出すことで、もう少し簡単な形に整理してみよう。

$$\theta_x^d = \left(-\frac{3n_x^d}{2l_d}\right)w^b + \left(\frac{3n_x^d}{2l_d}\right)w^c + \left(-\frac{n_x^{d2}}{4} + \frac{s_x^{d2}}{2}\right)(\theta_x^b + \theta_x^c) + \left(-\frac{n_y^d n_x^d}{4} + \frac{s_y^d s_x^d}{2}\right)(\theta_y^b + \theta_y^c) \quad (59)$$

$$\theta_y^d = \left(-\frac{3n_y^d}{2l_d}\right)w^b + \left(\frac{3n_y^d}{2l_d}\right)w^c + \left(-\frac{n_x^d n_y^d}{4} + \frac{s_x^d s_y^d}{2}\right)(\theta_x^b + \theta_x^c) + \left(-\frac{n_y^{d2}}{4} + \frac{s_y^{d2}}{2}\right)(\theta_y^b + \theta_y^c) \quad (60)$$

更に辺の法線ベクトル接線ベクトルを頂点座標と対応づけよう。

$$\mathbf{s}^d = (\mathbf{p}^c - \mathbf{p}^b)/l_d = \begin{pmatrix} x_{cb} \\ y_{cb} \end{pmatrix}/l_d \quad \rightarrow \quad s_x^d = x_{cb}/l_d, \quad s_y^d = y_{cb}/l_d \quad (61)$$

$$\mathbf{s}^d \perp \mathbf{n}^d \quad \rightarrow \quad \mathbf{n}^d = \begin{pmatrix} y_{cb} \\ -x_{cb} \end{pmatrix}/l_d \quad \rightarrow \quad n_x^d = y_{cb}/l_d, \quad n_y^d = -x_{cb}/l_d \quad (62)$$

を代入すると

$$\theta_x^d = \left(-\frac{3y_{cb}}{2l_d^2}\right)w^b + \left(\frac{3y_{cb}}{2l_d^2}\right)w^c + \left(-\frac{y_{cb}^2}{4l_d^2} + \frac{x_{cb}^2}{2l_d^2}\right)(\theta_x^b + \theta_x^c) + \left(\frac{3x_{cb}y_{cb}}{4l_d^2}\right)(\theta_y^b + \theta_y^c) \quad (63)$$

$$\theta_y^d = \left(\frac{3x_{cb}}{2l_d^2}\right)w^b + \left(-\frac{3x_{cb}}{2l_d^2}\right)w^c + \left(\frac{3x_{cb}y_{cb}}{4l_d^2}\right)(\theta_x^b + \theta_x^c) + \left(-\frac{x_{cb}^2}{4l_d^2} + \frac{y_{cb}^2}{2l_d^2}\right)(\theta_y^b + \theta_y^c) \quad (64)$$

さらに次のように変数を定める

$$a_d = -x_{cb}/l_d^2 \quad (65)$$

$$b_d = \frac{3}{4}x_{cb}y_{cb}/l_d^2 \quad (66)$$

$$c_d = \left(\frac{x_{cb}^2}{4} - \frac{y_{cb}^2}{2}\right)/l_d^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\frac{y_{cb}^2}{l_d^2} \quad (67)$$

$$d_d = -y_{cb}/l_d^2 \quad (68)$$

$$e_d = \left( \frac{y_{cb}^2}{4} - \frac{x_{cb}^2}{2} \right) / l_d^2 = \frac{3}{4} \frac{y_{cb}^2}{l_d^2} - \frac{1}{2} \quad (69)$$

これらを用いると最終的に辺の midpoint における回転量は次のとおり。

$$\theta_x^d = +1.5d_d w^b - 1.5d_d w^c - e_d (\theta_x^b + \theta_x^c) + b_d (\theta_y^b + \theta_y^c) \quad (70)$$

$$\theta_y^d = -1.5a_d w^b + 1.5a_d w^c + b_d (\theta_x^b + \theta_x^c) - c_d (\theta_y^b + \theta_y^c) \quad (71)$$

## 4.2 節点の撓み $w$ と $xy$ 軸回転から曲率を求める行列

### 4.2.1 撓み角の2次補間

$$\theta_x = N^1 \theta_x^1 + N^2 \theta_x^2 + N^3 \theta_x^3 + N^4 \theta_x^4 + N^5 \theta_x^5 + N^6 \theta_x^6 \quad (72)$$

$$= N^1 \theta_x^1 + N^2 \theta_x^2 + N^3 \theta_x^3 \quad (73)$$

$$+ N^4 \{ +1.5d_4 w^2 - 1.5d_4 w^3 - e_4 (\theta_x^2 + \theta_x^3) + b_4 (\theta_y^2 + \theta_y^3) \} \quad (74)$$

$$+ N^5 \{ +1.5d_5 w^3 - 1.5d_5 w^1 - e_5 (\theta_x^3 + \theta_x^1) + b_5 (\theta_y^3 + \theta_y^1) \} \quad (75)$$

$$+ N^6 \{ +1.5d_6 w^1 - 1.5d_6 w^2 - e_6 (\theta_x^1 + \theta_x^2) + b_6 (\theta_y^1 + \theta_y^2) \} \quad (76)$$

$$= -1.5(N^5 d_5 - N^6 d_6) w^1 + (N^1 - N^5 e_5 - N^6 e_6) \theta_x^1 + (N^5 b_5 + N^6 b_6) \theta_y^1 \quad (77)$$

$$- 1.5(N^6 d_6 - N^4 d_4) w^2 + (N^2 - N^6 e_6 - N^4 e_4) \theta_x^2 + (N^6 b_6 + N^4 b_4) \theta_y^2 \quad (78)$$

$$- 1.5(N^4 d_4 - N^5 d_5) w^3 + (N^3 - N^4 e_4 - N^5 e_5) \theta_x^3 + (N^4 b_4 + N^5 b_5) \theta_y^3 \quad (79)$$

$\theta_y$  についても同様に次のように補間関数を用いて表される。

$$\theta_y = N^1 \theta_y^1 + N^2 \theta_y^2 + N^3 \theta_y^3 + N^4 \theta_y^4 + N^5 \theta_y^5 + N^6 \theta_y^6 \quad (80)$$

$$= N^1 \theta_y^1 + N^2 \theta_y^2 + N^3 \theta_y^3 \quad (81)$$

$$+ N^4 \{ -1.5a_4 w^2 + 1.5a_4 w^3 + b_4 (\theta_x^2 + \theta_x^3) - c_4 (\theta_y^2 + \theta_y^3) \} \quad (82)$$

$$+ N^5 \{ -1.5a_5 w^3 + 1.5a_5 w^1 + b_5 (\theta_x^3 + \theta_x^1) - c_5 (\theta_y^3 + \theta_y^1) \} \quad (83)$$

$$+ N^6 \{ -1.5a_6 w^1 + 1.5a_6 w^2 + b_6 (\theta_x^1 + \theta_x^2) - c_6 (\theta_y^1 + \theta_y^2) \} \quad (84)$$

$$= +1.5(N^5 a_5 - N^6 a_6)w^1 + (N^5 b_5 + N^6 b_6)\theta_x^1 + (N^1 - N^5 c_5 - N^6 c_6)\theta_y^1 \quad (85)$$

$$+1.5(N^6 a_6 - N^4 a_4)w^2 + (N^6 b_6 + N^4 b_4)\theta_x^2 + (N^2 - N^6 c_6 - N^4 c_4)\theta_y^2 \quad (86)$$

$$+1.5(N^4 a_4 - N^5 a_5)w^3 + (N^4 b_4 + N^5 b_5)\theta_x^3 + (N^3 - N^4 c_4 - N^5 c_5)\theta_y^3 \quad (87)$$

#### 4.2.2 行列、ベクトル表記

次のように未知数を並べたベクトル  $\mathbf{r}$  を作る

$$\mathbf{r}^T = \{w^1, w^2, w^3, \theta_x^1, \theta_y^1, \theta_x^2, \theta_y^2, \theta_x^3, \theta_y^3\} \quad (88)$$

$\theta_x, \theta_y$  は行列  $\mathbf{H}_x, \mathbf{H}_y$  を用いて次のように書ける

$$\theta_x = \mathbf{H}_x \mathbf{r} \quad \theta_y = \mathbf{H}_y \mathbf{r} \quad (89)$$

但し行列  $\mathbf{H}_x, \mathbf{H}_y$  は次のとおり

$$\mathbf{H}_x^T = \begin{Bmatrix} -1.5(N^5 d_5 - N^6 d_6) \\ -1.5(N^6 d_6 - N^4 d_4) \\ -1.5(N^4 d_4 - N^5 d_5) \\ (N^1 - N^5 e_5 - N^6 e_6) \\ left(N^5 b_5 + N^6 b_6) \\ (N^2 - N^6 e_6 - N^4 e_4) \\ (N^6 b_6 + N^4 b_4) \\ (N^3 - N^4 e_4 - N^5 e_5) \\ (N^4 b_4 + N^5 b_5) \end{Bmatrix} \quad \mathbf{H}_y^T = \begin{Bmatrix} +1.5(N^5 a_5 - N^6 a_6) \\ +1.5(N^6 a_6 - N^4 a_4) \\ +1.5(N^4 a_4 - N^5 a_5) \\ (N^5 b_5 + N^6 b_6) \\ (N^1 - N^5 c_5 - N^6 c_6) \\ (N^6 b_6 + N^4 b_4) \\ (N^2 - N^6 c_6 - N^4 c_4) \\ (N^4 b_4 + N^5 b_5) \\ (N^3 - N^4 c_4 - N^5 c_5) \end{Bmatrix} \quad (90)$$

#### 4.2.3 線形形状関数の導入

補間関数  $N^i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) はサブパラメトリック 2 次補間であるから 1 次補間関数  $L_i$  ( $i = 1, \dots, 3$ ) を使って次のように表すことができる。

$$N^1 = L_1(2L_1 - 1) \quad N^2 = L_2(2L_2 - 1) \quad N^3 = L_3(2L_3 - 1) \quad (91)$$

$$N^4 = 4L_2L_3 \quad N^5 = 4L_3L_1 \quad N^6 = 4L_1L_2 \quad (92)$$

これを代入すると、 $\mathbf{H}_x, \mathbf{H}_y$  はそれぞれ次のように書くことができる。



$$\mathbf{H}_x^T = \begin{pmatrix} -6(L_1L_3d_5 - L_1L_2d_6) \\ -6(L_1L_2d_6 - L_2L_3d_4) \\ -6(L_2L_3d_4 - L_1L_3d_5) \\ L_1(2L_1 - 1) - 4L_1L_3e_5 - 4L_1L_2e_6 \\ 4(L_1L_3b_5 + L_1L_2b_6) \\ L_2(2L_2 - 1) - 4L_1L_2e_6 - 4L_2L_3e_4 \\ 4(L_1L_2b_6 + L_2L_3b_4) \\ L_3(2L_3 - 1) - 4L_2L_3e_4 - 4L_1L_3e_5 \\ 4(L_2L_3b_4 + L_1L_3b_5) \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_y^T = \begin{pmatrix} +6(L_1L_3a_5 - L_1L_2a_6) \\ +6(L_1L_2a_6 - L_2L_3a_4) \\ +6(L_2L_3a_4 - L_1L_3a_5) \\ 4(L_1L_3b_5 + L_1L_2b_6) \\ L_1(2L_1 - 1) - 4L_1L_3c_5 - 4L_1L_2c_6 \\ 4(L_1L_2b_6 + L_2L_3b_4) \\ L_2(2L_2 - 1) - 4L_1L_2c_6 - 4L_2L_3c_4 \\ 4(L_2L_3b_4 + L_1L_3b_5) \\ L_3(2L_3 - 1) - 4L_2L_3c_4 - 4L_1L_3c_5 \end{pmatrix} \quad (93)$$

#### 4.2.4 撓み角の微分

さて  $\mathbf{H}_x, \mathbf{H}_y$  の微分を計算して、微分された角度を求める行列を作ろう。 $\mathbf{H}_x, \mathbf{H}_y$  を直接  $x$  や  $y$  で微分するのではなく、形状関数で微分しておくのと簡単である。ここは一旦形状関数での微分を計算する。

$$\frac{\partial L_1}{\partial L_2} = -1 \quad \frac{\partial L_1}{\partial L_3} = -1 \quad (94)$$

に注意して、計算を行うと以下のとおり

$$\frac{\partial \mathbf{H}_x^T}{\partial L_2} = \begin{pmatrix} -(L_2 - L_1)t_6 + L_3t_5 \\ +(L_2 - L_1)t_6 + L_3t_4 \\ -L_3(t_4 + t_5) \\ -1 + (L_2 - L_1)r_6 + L_3r_5 \\ -(L_2 - L_1)q_6 - L_3q_5 \\ 1 + (L_2 - L_1)r_6 - L_3r_4 \\ -(L_2 - L_1)q_6 + L_3q_4 \\ -L_3(r_4 - r_5) \\ L_3(q_4 - q_5) \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{H}_x^T}{\partial L_3} = \begin{pmatrix} +(L_3 - L_1)t_5 - L_2t_6 \\ +L_2(t_4 + t_6) \\ -L_2t_4 - (L_3 - L_1)t_5 \\ -1 + L_2r_6 + (L_3 - L_1)r_5 \\ -L_2q_6 - (L_3 - L_1)q_5 \\ -L_2(r_4 - r_6) \\ L_2(q_4 - q_6) \\ 1 - L_2r_4 + (L_3 - L_1)r_5 \\ L_2q_4 - (L_3 - L_1)q_5 \end{pmatrix} \quad (95)$$

$$\frac{\partial H_y^T}{\partial L_2} = \left\{ \begin{array}{c} +(L_2 - L_1)p_6 - L_3p_5 \\ -(L_2 - L_1)p_6 - L_3p_4 \\ +L_3(p_4 + p_5) \\ -(L_2 - L_1)q_6 - L_3q_5 \\ 2 - 6L_1 - (L_2 - L_1)r_6 - L_3r_5 \\ -(L_2 - L_1)q_6 + L_3q_4 \\ -2 + 6L_2 - (L_2 - L_1)r_6 + L_3r_4 \\ L_3(q_4 - q_5) \\ L_3(r_4 - r_5) \end{array} \right\} \quad \frac{\partial H_y^T}{\partial L_3} = \left\{ \begin{array}{c} -(L_3 - L_1)p_5 + L_2p_6 \\ -L_2(p_4 + p_6) \\ +L_2p_4 + (L_3 - L_1)p_5 \\ -L_2q_6 - (L_3 - L_1)q_5 \\ 2 - 6L_1 - L_2r_6 - (L_3 - L_1)r_5 \\ L_2(q_4 - q_6) \\ L_2(r_4 - r_6) \\ L_2q_4 - (L_3 - L_1)q_5 \\ -2 + 6L_3 + L_2r_4 - (L_3 - L_1)r_5 \end{array} \right\} \quad (96)$$

但し、

$$p_d = -6x_{cb}/l_d^2 \quad (97)$$

$$q_d = 3x_{cb}y_{cb}/l_d^2 \quad (98)$$

$$r_d = 3y_{cb}^2/l_d^2 \quad (99)$$

$$t_d = -6y_{cb}/l_d^2 \quad (100)$$

#### 4.2.5 中立面の曲率

ここで中立面の曲率  $\kappa$  テンソルをベクトル表記したものは次のように表されるのであった。

$$\left\{ \begin{array}{c} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \end{array} \right\} \quad (101)$$

$\hat{H}_x^T, \hat{H}_y^T$  を利用して、上は  $\theta_x, \theta_y$  の微分を計算すると曲率ベクトルは次のとおりになる。

$$\left\{ \begin{array}{c} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial L_2}{\partial x} \frac{\partial H_y}{\partial L_2} + \frac{\partial L_3}{\partial x} \frac{\partial H_y}{\partial L_3} \\ -\frac{\partial L_2}{\partial y} \frac{\partial H_x}{\partial L_2} - \frac{\partial L_3}{\partial y} \frac{\partial H_x}{\partial L_3} \\ \frac{\partial L_2}{\partial y} \frac{\partial H_y}{\partial L_2} + \frac{\partial L_3}{\partial y} \frac{\partial H_y}{\partial L_3} - \frac{\partial L_2}{\partial x} \frac{\partial H_x}{\partial L_2} - \frac{\partial L_3}{\partial x} \frac{\partial H_x}{\partial L_3} \end{array} \right\} \cdot \mathbf{r} \quad (102)$$

これが頂点の撓みと  $xy$  回転から、面内の点における曲率を求める行列  $\mathbf{B}$  である。

### 4.3 剛性行列

さて、DKT 要素は離散点において Kirchhoff 条件が成り立つと仮定して作った要素であった。離散点以外では Kirchhoff 条件が成り立たつかどうかは分からない。Kirchhoff 条件が成り立たない板の歪エネルギーを計算するためには Mindlin-Reissner の厚板理論を使って剪断エネルギーも考慮しなければならない。しかし、ここでもう一つ仮定をおく。-DKT 要素内の歪エネルギーは剪断エネルギーを無視できるここではエネルギーを計算するときのみ、要素内全体で Kirchhoff 仮定が成り立つとしたということである。歪エネルギー  $U$  は曲げエネルギー  $U_b$  と等しく、 $B$  を用いて次のように書ける

$$U = U_b = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}^T \mathbf{D}_b \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} d\Omega \quad (103)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_e \int_{\Omega_e} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}^T \mathbf{D}_b \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} d\Omega \quad (104)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_e \int_{\Omega_e} \mathbf{r}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D}_b \mathbf{B} \mathbf{r} \Omega \quad (105)$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \left[ \sum_e \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_b \mathbf{B} \Omega \right] \mathbf{r} \quad (106)$$

明らかに

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_b \mathbf{B} \Omega \quad (107)$$

が要素剛性行列で

$$\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{K}_e \quad (108)$$

が全体剛性行列である。エネルギーの停留条件  $\delta U = 0$  から釣り合いの位置では次を満たす

$$\delta \mathbf{r}^T \mathbf{K} \mathbf{r} = \delta \mathbf{r}^T \cdot \mathbf{F} \quad (109)$$

ここで  $\mathbf{F}$  は  $\mathbf{r}$  に対応する右辺ベクトルである。被積分関数は二次関数なので3点による数値積分で十分である。[2]によると、積分点1, 2, 3は辺の midpoint にあり重みは  $1/3$  ずつにすればよい。

表 1: 積分点の位置と重み

積分点番号	積分点の位置 ( $L_1, L_2, L_3$ )	重み
1	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$1/3$
2	$(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$	$1/3$
3	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$	$1/3$

## 参考文献

- [1] 渡辺浩志：非線形有限要素法特論, <http://www.sml.k.u-tokyo.ac.jp/members/nabe/>.
- [2] 久田俊明, 野口裕久：非線形有限要素法の基礎と応用, 丸善 (1996).
- [3] 久田俊明：非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎, 丸善 (1999).
- [4] Dhatt, G. and Prof, A.: NUMERICAL ANALYSIS OF THIN SHELLS BY CURVED TRIANGULAR ELEMENTS BASED ON DISCRETE—KIRCHHOFF HYPOTHESIS, in *Proceedings*, p. 255 School of Engineering, Vanderbilt University (1969).
- [5] Kansara, K.: Development of Membrane, Plate and Flat Shell Elements in Java. (2004).
- [6] Batoz, J., Bathe, K. and Ho, L.: A study of three-node triangular plate bending elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, No. 12, pp. 1771–1812 (1980).
- [7] Bittnar, Z. and Sejnoha, J.: *Numerical Methods in Structural Mechanics*, Amer Society of Civil Engineers, new edition edition (1996).